



Institut Universitaire Professionnalisé d'Évry

Génie Électrique et Informatique Industrielle 3^{ème} Année
Génie des Systèmes Industriels 3^{ème} Année

TS31 : Traitement Statistique du Signal

Saïd Mammar

© **Institut Universitaire Professionnalisé d'Évry**

Table des matières

I	Éléments de cours	9
	Chapitre 1	Rappels sur les signaux et systèmes
		11
1	Classification des signaux	11
2	Représentation des signaux	11
3	Filtrage linéaire	12
3.1	Définition	12
3.2	Propriétés	12
3.3	Les filtres dynamiques	13
4	Échantillonnage	13
5	Signaux analytiques	14
	Chapitre 2	Signaux aléatoires
		15
1	Introduction	15
2	Notions de signaux aléatoires	15
3	Moments statistiques	15
3.1	Moment statistique d'ordre 1 (moyenne statistique)	16
3.2	Moment statistique d'ordre 2 (fonction d'auto-corrélation statistique)	16
3.3	Covariance	16
3.4	Variance	17
4	Moments temporels	17
4.1	Moment temporel d'ordre 1 (moyenne)	17
4.2	Moment temporel d'ordre 2 (fonction d'auto-corrélation temporelle)	17
5	Stationnarité et ergodicité	18
6	Densité spectrale de puissance	19
7	Fonctions et matrices de corrélation	19
8	Les signaux gaussiens	20
9	Filtrage des signaux aléatoires	20
10	Notion de bruit blanc	21
11	Notion de filtre formeur	21
12	Les signaux MA, AR et ARMA	22
12.1	Les signaux MA (<i>Moving Average, Moyenne Mobile</i>)	22
12.2	Les signaux AR (<i>AutoRgressifs</i>)	22
12.3	Les signaux ARMA (<i>Auto Regressif, Moving Average</i>)	23
	Chapitre 3	Notions d'estimation
		25
1	Introduction	25
2	Performance d'un estimateur	26
2.1	Biais d'un estimateur	26
2.2	Variance de l'estimateur	26
3	Estimation linéaire en moyenne quadratique (ELMQ)	26

3.1	Calcul par dérivation	27
3.2	Performances de l'estimateur	28
3.3	Principe d'orthogonalité	28
3.4	Détermination de l'estimateur par le principe d'orthogonalité	28
4	Estimation en moyenne quadratique (ELM)	29
5	Estimation Bayésienne et non-Bayésienne	30
6	Comparaison d'estimateurs sur un exemple simple	32
6.1	Estimation du pauvre	32
6.2	Connaissance de b au second ordre	32
7	Éléments d'estimation non-bayésienne	34
Chapitre 4 Estimation spectrale		37
1	Introduction	37
2	Estimation de la moyenne $E[x]$	37
3	Estimateur de variance σ^2	38
4	Estimateur de la fonction d'autocorrélation	39
5	Estimateur de densité spectrale	40
5.1	Méthode du périodogramme	40
5.2	Méthode du corrélogramme	44
5.3	Méthode du modèle	44
Chapitre 5 Méthodes récursives dans le temps		45
1	Introduction	45
2	Exemple	45
3	Réurrence temporelle sur les équations normales	46
4	Méthode des moindres carrés récursifs	47
5	Filtrage de Kalman	48
5.1	Équations des filtres	48
5.2	Détermination du gain du filtre	49
5.3	Résumé	50
Chapitre 6 Identification paramétrique		51
1	Introduction	51
2	Les modèles polynomiaux	52
2.1	Modèle ARX	52
2.2	Modèle ARMAX	52
2.3	Modèle à erreur de sortie	52
2.4	Modèle de Box-Jenkins	52
3	Modèle d'états	53
II Travaux dirigés		55
TD 1 : Propriétés des signaux aléatoires		57
TD 2 : Signaux aléatoires vectoriels		59
TD 3 : Estimateurs		61
TD 4 : Estimation et signaux AR		63
TD 5 : Filtrage de Kalman		65

III	Travaux pratiques	67
	TP 1 Analyse spectrale	69
1	Troncature et fenêtrage	69
2	Résolution d'une fenêtre	69
3	Densités spectrales de signaux AR et MA	69
3.1	Signaux MA	70
3.2	Signaux AR	70
	TP 2 : Estimation spectrale	71
1	Estimation de la fonction d'autocorrélation	71
2	Estimation de densité spectrale	71
2.1	Périodogramme	72
2.2	Périodogramme moyenné (Méthode de Welch)	72
2.3	Périodogramme moyenné avec recouvrement (overlapping)	72
2.4	Fonction 'PSD' de Matlab	72
	TP 3 : Filtrage de Kalman	73
1	Description du problème	73
2	Influence des conditions initiales	73
3	Influence du choix des variances des bruits	74
	TP 4 : Estimation et prédiction	75
1	Estimation de fonction de transfert	75
2	Égalisation d'un signal de son	75
3	Prédiction	76
IV	Quelques fonctions de Matlab	79
	Algèbre linéaire	81
1	Création de matrices et vecteurs	81
2	Manipulation et opérations sur les vecteurs et matrices	81
3	Factorisation de matrices	81
4	Opérations entre matrices et vecteurs	82
5	Les polynômes	82
	Traitement du signal	83
1	Fenêtrage	83
2	Génération de signaux	83
3	Transformées	83
4	Traitement statistique	84
5	Filtrage, analyse et synthèse	84
6	Modélisation paramétrique	84
7	Fonctions diverses	84
8	Estimation de paramètres de modèles	85

Table des figures

1	Exemple de processus stationnaire et ergodique	18
2	Exemple de processus non stationnaire	18
3	Bruit blanc à bande limitée	21
4	Filtre formeur	21
1	Estimation linéaire	26
2	Estimation en moyenne quadratique	29
1	fenêtre rectangulaire	42
2	Fenêtre de Hamming	42
3	Fenêtre de Hanning	42
4	Fenêtre triangulaire	43
5	Fenêtre de Chebychev	43
6	Fenêtre de Blackman	43
7	Fenêtre de Kaiser	44
1	Structure du filtre de Kalman	49
1	modèle général d'identification	51
2	Signaux exogènes en sortie	51

Première partie
Éléments de cours

Chapitre 1 Rappels sur les signaux et systèmes

1 Classification des signaux

Un signal est une fonction d'une ou plusieurs variables servant de support à la transmission d'une commande ou d'une information. La classification peut se faire selon :

- les variables de dépendance :
 - le temps, on parle alors de signaux temporels (ce sont les plus courants)
 - l'espace et le temps, on parle de signaux spatio-temporels (ex : les ondes électromagnétiques)
- les valeurs que peut prendre le signal : scalaires, vectorielles, réelles, complexes

Dans cette étude on se restreint aux signaux temporels. La généralisation aux autres types de signaux ne pose pas de difficulté majeure. Parmi les signaux temporels, on distingue :

- les signaux à temps continu ou discrets (échantillonnés)
- les signaux à valeurs continues ou à valeurs discrètes (quantification, numérisation)
- les signaux déterministes ou aléatoires (prise en compte de bruits par exemple)

2 Représentation des signaux

Un des objectifs de la transformation d'un signal est l'obtention d'une représentation équivalente. Les plus importantes dans le cadre de cette étude sont :

- La transformée de Fourier à temps continu. $x(t)$ étant le signal temporel, on définit la transformée de Fourier par :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi jft} dt \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{+2\pi jft} df \quad (1)$$

- La transformée de Fourier à temps discret. Cette fonction est périodique de période $1/T$:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(nT)e^{-2\pi jfnT} \quad x(nT) = \frac{1}{T} \int_{-1/2T}^{1/2T} X(f)e^{+2\pi jnTf} df \quad (2)$$

- La transformée bilatérale de Laplace, intégrale convergente sur une bande définie par deux droites parallèles à l'axe imaginaire d'abscisses a_1 et a_2 :

$$X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt \quad x(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_B X(p)e^{pt} dp \quad (3)$$

On a égalité avec la transformée de Fourier sur l'axe imaginaire $X(f) = X(p)$ pour $p = j\omega$.

- La transformée bilatérale en z définie pour un signal discret $x(nT)$, convergente sur un anneau C centré en zéro et défini par deux rayons r_1 et r_2 :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_C X(z)z^{n-1}dz \quad (4)$$

On a égalité avec la transformée de Fourier à temps discret pour $z = e^{2\pi j f T} = e^{2\pi j n}$.

3 Filtrage linéaire

3.1 Définition

On appelle filtre linéaire un système à la fois linéaire et invariant dans le temps. Ceci implique qu'une combinaison linéaire d'entrées entraîne la même combinaison linéaire des sorties, et de plus tout décalage temporel de l'entrée entraîne le même décalage en sortie.

Dans le domaine temporel, l'entrée et la sortie sont liées par une opération de convolution introduisant la réponse impulsionnelle $h(t)$ dans le cas continu ou $h(n)$ dans le cas discret. Un filtre linéaire est donc un convolveur.

Soit $x(t)$ (resp. $x(n)$) l'entrée du filtre et $y(t)$ (resp. $y(n)$) sa sortie, nous avons alors :

- dans le cas continu :

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)du \quad (5)$$

- dans le cas discret cette relation s'écrit :

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h(k)x(n-k) \quad (6)$$

Un filtre linéaire est un système linéaire qui admet les signaux exponentiels comme fonctions propres. Pour un signal exponentiel à l'entrée du filtre, on obtient le même signal exponentiel en sortie multiplié par un nombre complexe (gain du filtre, fonction de transfert). En effet la réponse à un signal sinusoïdal est un signal sinusoïdal de même fréquence dont l'amplitude est multipliée par le gain du filtre à cette fréquence et déphasé de l'argument de la fonction de transfert.

Les relations précédentes s'écrivent aussi par passage à la transformée de Laplace, ou de Fourier, ou en z

$$Y(p) = H(p)X(p) \quad Y(z) = H(z)X(z) \quad (7)$$

3.2 Propriétés

- Causalité : pour cela, la réponse impulsionnelle nulle pour $t < 0$. En effet c'est la réponse du filtre pour un signal situé à l'origine des temps (l'impulsion de Dirac) :

$$h(t) = h(t) * \delta(t)$$

Parfois il est utile de considérer l'anticausalité ($h(t) = 0$ pour $t > 0$).

- Stabilité : on ne considère que la stabilité (entrée bornée / sortie bornée). Pour le cas discret une condition nécessaire mais non suffisante est que $h(n)$ soit bornée.

3.3 Les filtres dynamiques

3.3.1 Définitions

Les filtres dynamiques constituent une sous classe des filtres linéaires. Ils sont caractérisés par une fonction de transfert en p ou z ayant la forme d'une fraction rationnelle. Ceci est équivalent au fait que la relation entrée-sortie peut être représentée par une équation différentielle à coefficients constants dans le cas continu, ou une équation aux différences à coefficients constants dans le cas discret. Ceci est le cas de nombreux processus physiques.

– Dans le cas continu :

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}(t) \quad (8)$$

$$H(p) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \quad (9)$$

– Dans le cas discret :

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^m b_j x(k-j) \quad (10)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}} \quad (11)$$

Ce filtre est appelé filtre récursif (filtre R.I.I, *Réponse impulsionnelle finie*, signaux A.R.M.A, *Auto Regressif Moving Average*). Il correspond au cas le plus général

– filtre à réponse impulsionnelle finie (R.I.F) (signaux *Moving Average*)

$$H(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^{-j} \quad (12)$$

– filtre tous pôles (b_0 est le seul non nul, a_i non nuls) (signaux *Auto Regressif*)

$$H(z) = \frac{b_0}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}} \quad (13)$$

3.3.2 Propriétés

- La causalité : Un filtre dynamique est causal si sa réponse impulsionnelle est causale. Une condition nécessaire dans le cas discret est que le degré du dénominateur soit supérieur ou égal à celui du numérateur.
- La stabilité : Les pôles sont localisés dans le demi-plan à gauche de l'axe imaginaire. Dans le cas discret la stabilité est réalisée si les pôles sont à l'intérieur du cercle unité.

4 Échantillonnage

Cette opération consiste à prélever un échantillon du signal à temps continu à chaque instant $t_n = nT$. Le passage du temps continu au temps discret entraîne en général une perte d'information. Dans certains cas particuliers, ce passage peut se faire sans perte. La période d'échantillonnage maximale est $T = 1/2B$, où B est la largeur du spectre de $x(t)$ (c'est le théorème de Shannon). L'opération d'échantillonnage est directement liée au peigne de Dirac défini par :

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT) \quad (14)$$

dans le domaine temporel, et par :

$$\delta_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (15)$$

dans le domaine fréquentiel.

Échantillonner un signal revient à multiplier ce signal par le peigne de Dirac.

$$\tilde{x}(t) = x(t) \cdot \delta_T(t) \quad \tilde{X}(f) = X(f) * \delta_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (16)$$

Le spectre d'un signal échantillonné est donc périodique.

5 Signaux analytiques

La transformée de Fourier d'un signal réel à temps continu ou discret présente une symétrie hermitienne :

$$X(f) = X^*(-f) \quad (17)$$

C'est une condition nécessaire et suffisante. Les fréquences négatives n'apportent donc aucune information complémentaire sur le signal. Le signal obtenu par élimination de ces fréquences négatives est appelé signal analytique.

Chapitre 2 Signaux aléatoires

1 Introduction

Un signal déterministe ne transporte aucune information étant donné que son évolution est donnée par une formule mathématique complètement connue. La plupart des signaux utilisés en pratique comportent une certaine incertitude dans leurs évolutions. Cette incertitude peut dans certains cas être décrite par une loi de probabilité (ex : gaussienne à paramètres connus ou inconnus).

A titre d'exemple le signal transmis entre deux ordinateurs peut être considéré comme un signal aléatoire pouvant prendre par exemple 2 valeurs, 0 ou 1. On pourra supposer que les symboles 0 et 1 sont de plus équiprobables. En effet le phénomène aléatoire du signal vient du fait que l'on ne connaît pas à l'avance la succession des 0 et des 1. De plus si telle succession était connue alors la transmission n'aurait plus aucun intérêt puisqu'elle n'apporte pas d'information supplémentaire.

Nous ne nous intéressons dans cette présentation qu'à certaines propriétés et définitions qui nous seront utiles par la suite.

2 Notions de signaux aléatoires

Un signal aléatoire $x(t, \omega)$ est une fonction de deux paramètres dont l'un est généralement le temps (continu ou discret) et l'autre une épreuve dans un espace de probabilité (Ω).

- Pour $\omega = \omega_o$ fixé, le signal $x(t, \omega_o)$ est un échantillon du signal aléatoire, Il représente en fait un signal déterministe.
- Pour $t = t_o$ fixé, $x(t_o, \omega)$ est une variable aléatoire.

Dans toute la suite, on admettra que le signal aléatoire est décrit par sa loi temporelle.

Dans le cas d'un signal aléatoire à temps continu, on prélève un nombre arbitraire d'instant, eux même arbitraires. On peut alors considérer une variable aléatoire vectorielle constituée de ces instants prélevés. Si la loi de probabilité de cette variable aléatoire est connue quels que soient les instants choisis, on dira que la loi temporelle est complètement connue.

Dans le cas d'un signal aléatoire à temps discret, le problème est plus simple étant donné que le nombre d'échantillons dans le signal est dénombrable et donc la loi temporelle peut être complètement connue. Par contre dans le cas du signal à temps continu, certains événements microscopiques peuvent nous échapper.

Quoi qu'il en soit, cette loi temporelle est très difficile à obtenir. Généralement, on se restreint à la connaissance de certaines moyennes.

3 Moments statistiques

Pour alléger les écritures, on notera dans certains cas simplement $x(t)$, le signal aléatoire $x(t, \omega)$.

3.1 Moment statistique d'ordre 1 (moyenne statistique)

Ce moment correspond à la moyenne sur l'ensemble des événements possibles. Le résultat dans le cas général est donc une fonction du temps.

– dans le cas continu :

$$m(t) = E[x(t)] = \int_{\Omega} x(t, \omega) p(\omega) d\omega \quad (1)$$

– dans le cas discret :

$$m(n) = \sum_{i=1}^l p_i x_i \quad (2)$$

Si cette moyenne ne dépend pas du temps, on dit que le signal aléatoire est stationnaire à l'ordre 1. Si la moyenne est nulle, le signal aléatoire est dit centré.

Remarque 1 Rappelons ici les deux propriétés principales de l'espérance mathématique

– L'espérance est linéaire :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, E[\alpha x + \beta y] = \alpha E[x] + \beta E[y] \quad (3)$$

– Si deux variables x et y sont indépendantes, alors :

$$E[xy] = E[x] E[y] \quad (4)$$

3.2 Moment statistique d'ordre 2 (fonction d'auto-corrélation statistique)

Ce moment correspond encore une fois à la moyenne statistique du produit de deux échantillons du signal pris à des instants différents t_1 et t_2 .

– dans le cas continu :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1)x^*(t_2)] \quad (5)$$

– dans le cas discret :

$$R_{xx}(n, k) = E[x_n x_k^*] \quad (6)$$

On remarquera que le signal aléatoire peut prendre des valeurs complexes. Lorsque les quantités précédentes ne dépendent que de la différence $(t_1 - t_2)$ ou $(n - k)$, on dit que le signal aléatoire est stationnaire à l'ordre 2. On a alors l'habitude de noter :

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t)x^*(t - \tau)] \quad (7)$$

ou

$$R_{xx}(i) = E[x_n x_{n-i}^*] \quad (8)$$

3.3 Covariance

– Dans le cas continu :

$$\gamma(t_1, t_2) = E[x(t_1)x^*(t_2)] - m(t_1)m^*(t_2) \quad (9)$$

– Dans le cas discret :

$$\gamma(n, k) = E[x_n x_k^*] - m(n)m^*(k) \quad (10)$$

3.4 Variance

On définit la variance d'un signal aléatoire dans le cas continu comme dans le cas discret par :

$$\sigma^2(x) = E[x^2] - E(x)^2 \quad (11)$$

$$= E[(x - E(x))^2] \quad (12)$$

Pour un signal aléatoire centré ($E(x) = 0$), la variance est alors égale à la puissance.

$$\sigma^2(x) = E[x^2] = P \quad (13)$$

Un signal aléatoire est du second ordre si :

$$E[|x(t)|^2] < +\infty \quad (14)$$

Cette propriété entraîne l'existence de $m(t)$ et de $\gamma(t_1, t_2)$.

4 Moments temporels

Dans ce qui suit, nous supposons les signaux de puissance finie. Des définitions équivalentes peuvent être données pour des signaux d'énergie finie.

4.1 Moment temporel d'ordre 1 (moyenne)

– cas continu :

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, \omega) dt \quad (15)$$

– cas discret :

$$\langle x(n) \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^{n=N} x(n, \omega) \quad (16)$$

Dans le cas général, la sommation étant faite sur le temps, le résultat obtenu est normalement une variable aléatoire dépendant de ω . Dans le cas contraire on dira que le signal est ergodique à l'ordre 1.

4.2 Moment temporel d'ordre 2 (fonction d'auto-corrélation temporelle)

– cas continu :

$$\langle x(t)x(t - \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, \omega)x^*(t - \tau, \omega) dt \quad (17)$$

– cas discret :

$$\langle x(n)x(n - k) \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^{n=N} x(n, \omega)x^*(n - k, \omega) \quad (18)$$

5 Stationnarité et ergodicité

Un signal aléatoire est dit strictement stationnaire à l'ordre n si ses moments statistiques sont invariants par changement de l'origine des temps. Généralement, on se restreint à l'ordre 2 (sens large). La fonction d'autocorrélation ne dépend donc que du retard entre les deux signaux. La stationnarité est conservée par opération stationnaire (ex : filtrage).

Un signal aléatoire est dit ergodique si les moyennes temporelles existent et sont indépendantes de l'échantillon.

Le théorème de Birkoff affirme que si un signal aléatoire est stationnaire et ergodique, alors les moments temporels et statistiques sont égaux.

$$E[x(t)] = \langle x(t) \rangle = cste \quad (19)$$

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \langle x(t_1)x(t_2) \rangle = R_{xx}(t_1 - t_2) \quad (20)$$

La figure 1 montre un exemple de processus stationnaire et ergodique.

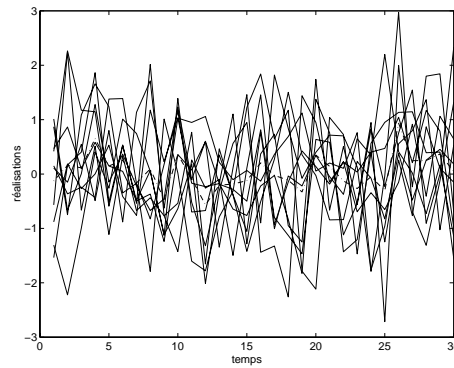


FIG. 1: Exemple de processus stationnaire et ergodique

La figure 2 montre un exemple de processus non stationnaire.

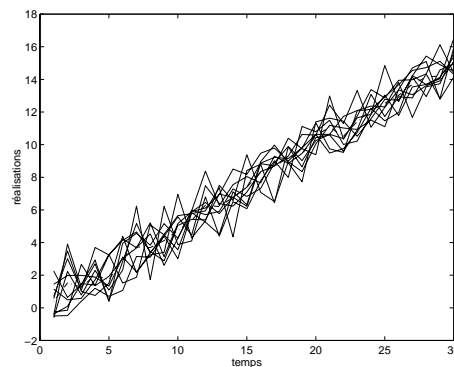


FIG. 2: Exemple de processus non stationnaire

Exemple 1 *Le signal $x(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi)$ est :*

- déterministe si a, ω_0 et ϕ sont des constants.
- aléatoire si par exemple a, ω_0 sont constants et ϕ est aléatoire.

- si ϕ est équirépartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, le signal aléatoire est stationnaire et ergodique.
- si ϕ est équirépartie sur l'intervalle $[0, \pi]$, le signal aléatoire est toujours ergodique mais non stationnaire.

6 Densité spectrale de puissance

Le théorème de Wiener-Kintchine permet d'assurer que la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire de fonction auto corrélation $R_{xx}(\tau)$ est donnée par :

- continu :

$$S_{xx}(f) = TF [R_{xx}(\tau)] \quad (21)$$

- discret :

$$S_{xx}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n)e^{-2j\pi n\nu} \quad (22)$$

La puissance du signal aléatoire stationnaire et ergodique peut être obtenue par la relation :

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, \omega)x^*(t, \omega) dt \quad (23)$$

$$= R_{xx}(0) \quad (24)$$

$$= E [|x(t)|^2] \quad (25)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df \quad (26)$$

7 Fonctions et matrices de corrélation

Soit $x(t)$ un signal aléatoire complexe et vectoriel de dimension n et stationnaire à l'ordre 2.

$$x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_{n-1}(t) \quad x_n(t)]^T \quad (27)$$

La moyenne de ce signal est un vecteur $m(t)$ de même dimension, donné par :

$$m(t) = E [x(t)] \quad (28)$$

$$= [E[x_1(t)] \quad E[x_2(t)] \quad \dots \quad E[x_{n-1}(t)] \quad E[x_n(t)]]^T \quad (29)$$

La matrice Γ de corrélation est définie par :

$$\Gamma(\tau) = E [x(t)x^H(t-\tau)] \quad (30)$$

$$= \begin{bmatrix} E(x_1(t)x_1^H(t-\tau)) & E(x_1(t)x_2^H(t-\tau)) & \dots & E(x_1(t)x_n^H(t-\tau)) \\ E(x_2(t)x_1^H(t-\tau)) & \dots & \dots & E(x_2(t)x_n^H(t-\tau)) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ E(x_n(t)x_1^H(t-\tau)) & \dots & \dots & E(x_n(t)x_n^H(t-\tau)) \end{bmatrix} \quad (31)$$

l'exposant H signifie transposée conjuguée. Cette matrice possède les propriétés suivantes

- $\Gamma(\tau)$ est une matrice paire.
- $\Gamma(\tau)$ est une matrice hermitienne dans le cas complexe et symétrique dans le cas réel.
- $\Gamma(0)$ est une matrice définie non négative, c'est-à-dire :

$$\forall u \in C^{n \times 1}, u^H \Gamma(0) u \geq 0$$

Le dernier point se vérifie de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 u^H \Gamma(0) u &= u^H E(x x^H) u \\
 &= E(u^H x x^H u) \\
 &= E\left((u^H x)(u^H x)^H\right) \\
 &= E\left(\|u^H x\|^2\right) \geq 0
 \end{aligned}$$

De même, on définit la matrice de variance-covariance par :

$$\gamma(\tau) = E[x(t)x^H(t-\tau)] - E(x(t)).E(x(t))^H \quad (32)$$

Dans le cas général, $\gamma(\tau)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Ceci veut dire qu'à partir d'une certaine valeur de t , le signal $x(t)$ devient indépendant de $x(t-\tau)$.

8 Les signaux gaussiens

Les signaux gaussiens tiennent une place très importante en traitement statistique du signal. En effet, ils permettent de simplifier grandement les calculs. Un signal gaussien est défini par sa moyenne m et sa matrice de covariance Γ . On le représente par le symbole $N(m, \Gamma)$. Sa densité de probabilité, aussi appelée fonction de répartition, est donnée par :

$$p(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-1/2} (\det \Gamma)^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2}((x-m)^T \Gamma^{-1}(x-m))\right] \quad (33)$$

Si le signal gaussien est centré ($m = 0$) alors tous les moments d'ordres impairs sont nuls. En particulier, il est à noter que le caractère gaussien se conserve par filtrage linéaire.

9 Filtrage des signaux aléatoires

Soit $h(t)$ la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire et stationnaire d'entrée $u(t)$ et de sortie $x(t)$, on démontre les propriétés suivantes dans le cas où le signal d'entrée est supposé stationnaire :

$$E[x(t)] = H(0).E[u(t)] \quad (34)$$

$$R_{xx}(\tau) = R_{uu}(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) \quad (35)$$

$$S_{xx}(f) = S_{uu}(f).|H(f)|^2 \quad (36)$$

Les propriétés ci-dessus, ne sont pas difficiles à établir. A titre d'exemple :

$$x(t) = \int_0^{+\infty} h(v)u(t-v)dv \quad (37)$$

d'où

$$E[x(t)] = \int_0^{+\infty} h(v)E[u(t-v)]dv \quad (38)$$

Le signal d'entrée étant stationnaire, on en déduit :

$$E[x(t)] = E[u(t)] \int_0^{+\infty} h(v)dv \quad (39)$$

$$= E[u(t)].H(0) \quad (40)$$

10 Notion de bruit blanc

On appelle bruit blanc $b(t)$ un signal aléatoire de densité spectrale constante. On note généralement :

$$S_{bb}(f) = \frac{N_0}{2} \quad (41)$$

Sa fonction d'autocorrélation est donc donnée par :

$$R_{bb}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (42)$$

Le bruit blanc n'a pas d'existence physique car il serait de puissance infinie. Une approximation du bruit blanc est le bruit à bande limitée appelé aussi bruit blanc coloré est défini par : (figure 3)

$$\begin{cases} S_{bb}(f) = \frac{N_0}{2} & |f| < B \\ S_{bb}(f) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (43)$$

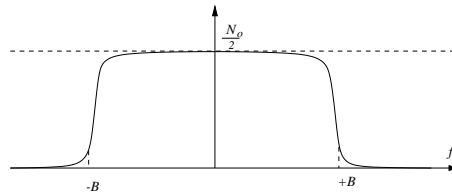


FIG. 3: Bruit blanc à bande limitée

Il faut remarquer que la notion de blancheur est indépendante de la loi de probabilité du bruit. Un bruit blanc peut être gaussien, uniforme...

11 Notion de filtre formeur

Supposons donné un signal aléatoire $x(t)$. On appelle filtre formeur de $x(t)$, le filtre de fonction de transfert $H(f)$, tel que $x(t)$ est généré par passage d'un bruit blanc $b(t)$ dans $H(f)$ (figure 4).

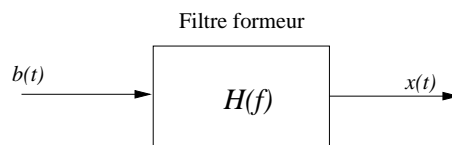


FIG. 4: Filtre formeur

La détermination du filtre formeur s'effectue en remarquant que :

$$S_{xx}(f) = |H(f)|^2 S_{bb}(f) \quad (44)$$

d'où

$$|H(f)| = \left(\frac{2}{N_0} S_{xx}(f) \right)^2 \quad (45)$$

On remarque que cette équation ne donne que le module. Pour déterminer complètement $H(f)$, il faut ajouter une contrainte de phase.

Nous allons voir dans ce qui suit les modèles de signaux les plus utilisés en traitement statistique du signal (estimation, prédiction...).

12 Les signaux MA, AR et ARMA.

12.1 Les signaux MA (*Moving Average, Moyenne Mobile*).

Les signaux à moyenne mobile sont obtenus par passage d'un bruit blanc dans un filtre purement transverse. Ce filtre est aussi appelé filtre à réponse impulsionnelle finie (R.I.F). L'équation de récurrence reliant la sortie x_n au signal d'entrée u_n est de la forme :

$$x_n = b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \dots + b_m u_{n-m} \quad (46)$$

La fonction de transfert de ce filtre a déjà été vue précédemment, elle s'écrit :

$$H(z) = \sum_{i=0}^m b_i z^{-i} \quad (47)$$

Bien que l'expression du filtre paraisse simple, l'obtention des coefficients b_i est en fait un problème complexe. Supposons à titre d'exemple que l'on veuille modéliser un signal x_n comme étant un signal MA. Si on suppose que le bruit d'entrée est centré et stationnaire ($E(u_n) = 0$), on peut alors écrire :

$$x_{n-k} = b_0 u_{n-k} + b_1 u_{n-k-1} + \dots + b_m u_{n-k-m} \quad (48)$$

On obtient :

$$E[x_n \cdot x_{n-k}] = E[(b_0 u_n + \dots + b_m u_{n-m}) \cdot (b_0 u_{n-k} + \dots + b_m u_{n-k-m})] \quad (49)$$

Si on suppose de plus que les réalisations du bruit d'entrée sont indépendantes, on a :

$$E[u_i \cdot u_j] = E(u_i)E(u_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (50)$$

$$E[u_i^2] = \sigma_u^2 \quad (51)$$

et finalement

$$E[x_n \cdot x_{n-k}] = \sigma_u^2 (b_0 b_k + b_1 b_{k+1} + \dots + b_{k-m} b_m) \quad |k| < m \quad (52)$$

On peut remarquer d'après l'équation (49) que la fonction d'autocorrélation devient nulle à partir d'un décalage m .

Si les quantités $E[x_n \cdot x_{n-k}]$ et σ_u^2 sont supposées connues, on remarque que la détermination des b_k nécessite la résolution d'un système d'équations non-linéaires. De plus ce système n'admet pas forcément une solution unique.

12.2 Les signaux AR (*AutoRgressifs*)

Les signaux autorégressifs sont obtenus par passage d'un bruit blanc dans un filtre purement récursif. Ce filtre est donc de réponse impulsionnelle infinie. L'équation de récurrence reliant la sortie x_n au signal d'entrée u_n est de la forme :

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_r x_{n-r} + u_n \quad (53)$$

Cette équation de récurrence s'écrit aussi sous forme plus condensée :

$$x_n = a^T X_n + u_n \quad (54)$$

avec $a = [a_1, a_2, \dots, a_r]^T$ et $X_n = [x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-r}]^T$. La fonction de transfert de ce filtre est donnée par :

$$H(z) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{r-1} a_j z^{-j}} \quad (55)$$

La sortie x_n du filtre est du second ordre si le filtre est dynamique c'est-à-dire stable et causal. La fonction de transfert du filtre doit avoir ses pôles à l'intérieur du cercle unité. Soit c le vecteur de corrélation entre x_n et X_n . Nous avons :

$$\begin{aligned} c &= E[x_n X_n] \\ &= E[(a^T X_n + u_n) X_n] \\ &= E[a^T X_n] + E[u_n X_n] \end{aligned} \quad (56)$$

En remarquant que $a^T X_n$ est scalaire et que u_n et X_n sont indépendants, la quantité précédente peut s'écrire

$$c = E[X_n^T X_n] a + E(u_n)E(X_n) \quad (57)$$

En notant Γ la matrice de covariance du vecteur X_n et sachant que u_n est centré, le vecteur c s'écrit finalement

$$c = \Gamma a \quad (58)$$

Cette équation vectorielle est appelée équation normale ou équation de Yule-Walker. Si la matrice Γ est inversible alors le vecteur de régression peut être calculé à partir des r premières valeurs de la fonction de corrélation.

On démontre après quelques lignes de calcul que

$$\sigma_x^2 = E(x^2) = a^T \Gamma a + \sigma_u^2 \quad (59)$$

12.3 Les signaux ARMA (*Auto Regressif, Moving Average*)

Les signaux ARMA sont obtenus par passage d'un bruit blanc dans un filtre récursif appelé aussi filtre à réponse impulsionnelle infinie (R.I.I). Ces signaux sont une combinaison des signaux A.R et M.A. La fonction de transfert du filtre présente un numérateur et un dénominateur

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^{r} a_j z^{-j}} \quad (60)$$

Chapitre 3 Notions d'estimation

1 Introduction

Le but est d'appliquer la statistique au signal. Le domaine de la statistique fait partie de la théorie de la décision : prendre la décision vis-à-vis d'un paramètre au sens le plus large possible en optimisant un critère à partir d'observations. Les paramètres à estimer seront notés x . On supposera de plus disponible un vecteur d'observations y de la forme

$$y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \quad (1)$$

Le paramètre à estimer peut être aléatoire ou déterministe.

Exemple 2 Soit un signal aléatoire sinusoïdal de la forme :

$$s(t) = a \sin(\omega t) + b(t) \quad (2)$$

où $b(t)$ est un bruit, ω est la pulsation du signal (supposée connue) et a est une constante inconnue qu'on cherche à estimer à partir des observations de $s(t)$ à des instants t_i .

Comme le montre l'exemple précédent, les observations seront donc toujours considérées comme aléatoires. On notera $\hat{x}(y)$ l'estimée au mieux d'un paramètre x à partir des observations y . L'estimée étant une fonction de la mesure, elle sera donc également considérée comme aléatoire. Cette considération est indépendante de x qui lui peut être aléatoire ou déterministe.

Si \hat{x} est à valeurs continues, on parle d'estimation. Si \hat{x} est à valeurs discrètes on parle alors de détection. C'est le cas du signal radar où on désire une détection de type présence ou absence.

L'erreur d'estimation appelée innovation peut être définie par :

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (3)$$

Exemple 3 soit un signal $s(t)$ dont on connaît n observations $y = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T$. On désire estimer la valeur moyenne du signal $s(t)$. L'estimateur qui nous vient directement à l'idée est construit à partir de la moyenne des observations déjà réalisées du signal. L'estimateur prend donc la forme suivante :

$$\hat{m}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

Remarque 2 On montrera par la suite que cet estimateur intuitif est en réalité un estimateur sans biais et à variance minimale. On remarque de plus que cet estimateur est obtenu par filtrage à réponse impulsionnelle finie (R.I.F) de y . On peut en effet écrire :

$$\hat{m}(y) = \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right] y = h(y) = h^T y$$

2 Performance d'un estimateur

2.1 Biais d'un estimateur

On appelle biais d'un estimateur la quantité $B(x)$ définie par :

$$B(x) = E[\hat{x}] - x \quad (4)$$

Cette quantité caractérise l'écart entre la moyenne des estimées (possibles) et le paramètre à estimer. On recherchera donc généralement un estimateur non-biaisé.

2.2 Variance de l'estimateur

La variance de l'estimateur est la quantité qui est généralement minimisée. Elle vaut :

$$\begin{aligned} V(\tilde{x}) &= E[\tilde{x}^2] \\ &= E[(x - \hat{x})^2] \\ &= E[x^2] - 2E[x\hat{x}] + E[\hat{x}^2] \end{aligned} \quad (5)$$

Comme nous allons le montrer, \hat{x} sera obtenu par le principe d'orthogonalité, la formule de Pythagore est applicable, on obtient alors :

$$V(\tilde{x}) = E[x^2] - E[\hat{x}^2]$$

Remarque 3 La formule précédente appelle quelques remarques :

- Nous avons l'encadrement suivant :

$$0 \leq V(\tilde{x}) \leq E[x^2]$$

- La borne inférieure correspond à l'estimation exacte (singulière)
- La borne supérieure correspond à l'estimation nulle.

3 Estimation linéaire en moyenne quadratique (ELMQ)

Soit $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ le vecteur des observations. On recherche maintenant une estimée \hat{x} de x qui soit une fonction linéaire des observations, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sum_{k=1}^n h_k y_k \\ &= h^T y \end{aligned}$$

avec $h = [h_1, h_2, \dots, h_n]^T$ (figure 1).

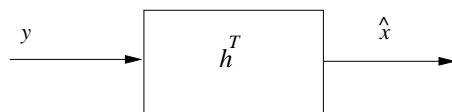


FIG. 1: Estimation linéaire

Remarque 4 Cette formulation du problème d'estimation va aussi répondre au problème de la prédiction. A titre d'exemple, si l'observation est $y = [x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-r}]^T$, alors l'estimateur :

$$\hat{x} = h^T y$$

correspond à la prédiction à 1 un pas et à passé fini r .

Dans le cas de l'estimation en moyenne quadratique, le filtre h doit alors être déterminé de telle sorte que la variance de l'erreur d'estimation $E[\hat{x}^2]$ soit minimale. Cette variance est aussi appelée erreur quadratique moyenne. On remarquera que la détermination de l'estimateur équivaut à la détermination du vecteur h .

3.1 Calcul par dérivation

L'erreur quadratique moyenne est donnée par :

$$\begin{aligned} E[\hat{x}^2] &= E \left[(x - h^T y)^T (x - h^T y) \right] \\ &= E \left[(x^T - y^T h) (x - h^T y) \right] \\ &= E [x x^T] - E [x^T h^T y] - E [y^T h x] + E [y^T h h^T y] \end{aligned}$$

La dérivée par rapport à h vaut :

$$\frac{dE[\hat{x}^2]}{dh} = -E [x y^T] - E [x y^T] + 2h^T E [y y^T] \quad (6)$$

L'annulation de cette dérivée donne

$$h^T = E [x y^T] (E [y y^T])^{-1} \quad (7)$$

En définissant les matrices d'intercorrélation entre x et y et la matrice de corrélation (de variance covariance) de y :

$$\Gamma_{xy} = E [x y^T] \quad (8)$$

$$\Gamma_y = E [y y^T] \quad (9)$$

On obtient :

$$\hat{x} = h^T y \quad (10)$$

$$= \Gamma_{xy} \Gamma_y^{-1} y \quad (11)$$

On peut donc dire que l'estimée linéaire en moyenne quadratique de x à partir du vecteur des observations y est obtenu par le filtrage linéaire suivant :

$$h^T = \Gamma_{xy} \Gamma_y^{-1}$$

Remarque 5 L'équation 10 suppose que les deux grandeurs x et y sont centrées. Si ce n'est pas le cas, elle se généralise à :

$$\hat{x} = E [x] + \Gamma_{x,y} \Gamma_y^{-1} \cdot (y - E [y]) \quad (12)$$

3.2 Performances de l'estimateur

Calculons dans ce cas particulier le biais de l'estimateur. Par définition, le biais est donné par l'équation :4

$$B(x) = E[\hat{x}] - x \quad (13)$$

$$B(x) = E[E[x] + \Gamma_{x,y} \Gamma_y^{-1} \cdot (y - E[y])] - x \quad (14)$$

La variance de l'estimateur est donnée par l'équation (5) qui se généralise dans le cas vectoriel à :

$$V(\tilde{x}) = E[xx^T] - 2E[x\hat{x}^T] + E[\hat{x}\hat{x}^T] \quad (15)$$

qui se réécrit sous la forme :

$$V(\tilde{x}) = \Gamma_{xx} - 2E[x(h^T y)^T] + E[(h^T y)(h^T y)^T] \quad (16)$$

$$= \Gamma_{xx} - 2E[xy^T h] + h^T E[yy^T] h \quad (17)$$

$$= \Gamma_{xx} - 2\Gamma_{xy} h + h^T \Gamma_y h \quad (18)$$

En remplaçant h par son expression dans l'équation (18), on obtient :

$$V(\tilde{x}) = \Gamma_{xx} - 2\Gamma_{xy} (\Gamma_y^{-1} \Gamma_{yx}) + (\Gamma_{x,y} \Gamma_y^{-1}) \Gamma_y (\Gamma_y^{-1} \Gamma_{yx}) \quad (19)$$

$$= \Gamma_{xx} - \Gamma_{xy} (\Gamma_y^{-1} \Gamma_{yx}) \quad (20)$$

3.3 Principe d'orthogonalité

Reprenons l'équation :

$$E[\tilde{x}^2] = E[(x - h^T y)^T (x - h^T y)] \quad (21)$$

La dérivation directe par rapport à h donne :

$$\frac{dE[\tilde{x}^2]}{dh} = -2E[(x - h^T y) y^T] \quad (22)$$

$$= 2E[\tilde{x} y^T] \quad (23)$$

Le minimum est donc obtenu lorsque $E[\tilde{x} y^T] = 0$. On dit aussi que l'innovation est indépendante des observations ou que l'innovation est orthogonale aux observations. C'est le principe d'orthogonalité. De plus l'équation $E[\tilde{x} y^T] = 0$ entraîne que chacune des composantes de \tilde{x} est orthogonale aux observations.

3.4 Détermination de l'estimateur par le principe d'orthogonalité

Le principe d'orthogonalité peut directement s'écrire :

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, E[(x - h^T y) (a^T y)^T] = 0 \quad (24)$$

en considérant l'ensemble des observations filtrées. Sachant que cette égalité doit être vraie quelle que soit la valeur de a , on en déduit que :

$$h^T = E[xy^T] \cdot E[yy^T]^{-1} \quad (25)$$

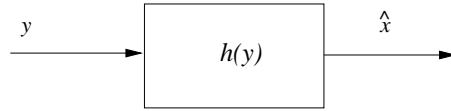


FIG. 2: Estimation en moyenne quadratique

4 Estimation en moyenne quadratique (ELM)

Le problème d'estimation de x à partir des observations y peut être vu comme un problème de filtrage dans lequel on recherche le filtre h tel que (figure 2) :

$$\hat{x} = h(y) \quad (26)$$

Mais dans ce cas le filtre h n'est plus forcément linéaire. Nous allons démontrer dans la suite que l'estimation en moyenne quadratique sans contrainte de linéarité, se résoud aussi, simplement par le principe d'orthogonalité. Pour cela, définissons le produit scalaire suivant :

$$\langle u, v \rangle = E(u^*v) = \int_{\Omega} u^*v p(\omega) d\omega \quad (27)$$

Remarque 6 *La formule précédente est valable dans le cas vectoriel, il suffit pour cela de remplacer le conjugué (*) par le vecteur transposé conjugué (H)*

Définissons aussi l'ensemble des observations filtrées \mathcal{H} :

$$\mathcal{H}(y) = \{g/g(y) \in \mathcal{H}\} \quad (28)$$

Partant du fait que \hat{x} appartient à l'espace des observations filtrées, on peut donc dire que :

$$\hat{x} = \text{proj}_{\perp}(x/\mathcal{H}(y)) \quad (29)$$

Ceci revient à écrire que l'erreur (innovation) est orthogonale à l'espace des observations filtrées.

$$(x - \hat{x}) \perp \mathcal{H}(y) \quad (30)$$

Remarque 7 *L'erreur est aussi appelée innovation car elle représente l'information indépendante des observations, c'est-à-dire orthogonale au sens du produit scalaire défini précédemment.*

Remarque 8 *Nous nous placerons dans la suite dans le cas réel, le symbole (*) sera donc omis.*

L'orthogonalité (équation 30) se traduit par l'équation suivante :

$$\forall g(y) \in \mathcal{H}(y), \langle (x - \hat{x}), g(y) \rangle = 0 \quad (31)$$

qui s'écrit aussi :

$$\forall g(y) \in \mathcal{H}(y), E[(x - \hat{x})g(y)] = 0 \quad (32)$$

Or comme \hat{x} appartient à l'espace des observations, il existe alors un filtre h tel que :

$$\hat{x} = h(y) \quad (33)$$

En remplaçant dans l'équation (32), on obtient :

$$\forall g(y) \in \mathcal{H}(y), E[(x - h(y))g(y)] = 0 \quad (34)$$

En développant l'espérance,

$$E[(x - h(y))g(y)] = \int (x - h(y))g(y)p(y, x)dydx \quad (35)$$

Sachant que la loi adjointe $p(y, x)$ s'écrit aussi :

$$p(y, x) = p(x/y)p(y) \quad (36)$$

On a alors :

$$E[(x - h(y))g(y)] = \int \left(\int (x - h(y))p(x/y)dx \right) g(y)p(y)dy \quad (37)$$

Sachant que l'égalité 34 doit être vraie quel que soit $g(y)$, on en déduit la condition suivante

$$\int (x - h(y)).p(x/y)dx = 0 \quad (38)$$

$$\int (x - h(y)).p(x/y)dx = 0 \quad (39)$$

$$h(y) \int p(x/y)dx = \int x.p(x/y)dx$$

D'où finalement

$$\hat{x} = h(y) = E[x/y] \quad (40)$$

Remarque 9 Si x et y sont indépendants et centrés, l'équation 40 donne :

$$\hat{x} = E[x/y] = E(x) \quad (41)$$

$$= 0 \quad (42)$$

On dit alors que l'estimation est nulle, ce qui est normal puisqu'on ne peut pas estimer une grandeur à partir d'observations indépendantes.

5 Estimation Bayésienne et non-Bayésienne

Soit Θ l'espace des paramètres scalaires ou vectoriels et \mathcal{E} l'espace des observations. On appelle estimateur une application de \mathcal{E} dans Θ qui au vecteur d'observations y associe une estimée \hat{x} du paramètre x :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\rightarrow \Theta \\ y &\rightarrow \hat{x} \end{aligned}$$

On désire ici que l'estimation soit optimale au sens d'un certain critère. On définit pour cela une fonction coût ou fonction perte :

$$L(x, \hat{x}) \quad (43)$$

Exemple 4 On considère souvent un critère quadratique :

$$L(x, \hat{x}) = (x - \hat{x})^2 \quad (44)$$

L'estimée étant considérée dans ce cas comme aléatoire, la minimisation de L n'a aucun sens. On définit une fonction risque R qui correspond à la moyenne spatiale (statistique) de la fonction coût par :

$$R = E[L(x, \hat{x})] \quad (45)$$

On dira alors que l'estimation est optimale si l'estimée minimise R . Il faut noter que l'espérance précédente porte sur les observations y . On la notera :

$$R = E_y [L(x, \hat{x})] \quad (46)$$

Explicitons l'expression de R :

$$R = \int L(x, \hat{x}(y))p(y/x)dy \quad (47)$$

On remarque alors que pour minimiser R , il faut connaître la fonction L et la densité de probabilité conditionnelle $p(y/x)$. Il faut donc connaître la loi de x . Ce fait permet de distinguer deux points de vue de l'estimation :

- l'estimation non-bayésienne : la loi de x est inconnue.
- l'estimation bayésienne : on suppose la loi de x connue.

Dans ce cas, on minimise le risque moyen :

$$\bar{R}(\hat{x}) = E_x [R(x, \hat{x})] \quad (48)$$

Il est facile de voir que \bar{R} ne dépend plus que de la mesure :

$$\begin{aligned} \bar{R}(\hat{x}) &= \int \int (L(x, \hat{x}(y))p(y/x)dy) p(x)dx \\ &= \int \int L(x, \hat{x}(y))p(y/x)p(x)dydx \\ &= \int \int (L(x, \hat{x}(y))p(x/y)dx) p(y)dy \\ &= \int G(y)p(y)dy \end{aligned} \quad (49)$$

avec

$$G(y) = \int L(x, \hat{x}(y))p(x/y)dx \quad (51)$$

Généralement au lieu de minimiser \bar{R} , on minimise alors directement $G(y)$ avec $G(y) > 0$.

Exemple 5 Reprenons le cas du coût quadratique

$$\begin{aligned} G(y) &= \int (x - \hat{x})^2 p(x/y)dx \\ &= \int x^2 p(x/y)dx + \int \hat{x}^2 p(x/y)dx - 2 \int \hat{x}xp(x/y)dx \\ &= E(x^2/y) + \hat{x}^2 \int p(x/y)dx - 2\hat{x}E(x/y) \\ &= E(x^2/y) + \hat{x}^2 - 2\hat{x}E(x/y) \end{aligned} \quad (52)$$

Calculons maintenant la valeur \hat{x}_{opt} de \hat{x} qui rend cette quantité minimale. Pour cela, il faut d'abord calculer la dérivée de G par rapport à \hat{x} :

$$\frac{dG(y)}{d\hat{x}} = 2\hat{x} - 2E(x/y) = 0 \quad (54)$$

Le minimum est donc obtenu pour :

$$\hat{x}_{opt} = E(x/y) \quad (55)$$

Cette valeur correspond bien à un minimum car :

$$\frac{d^2G(y)}{d\hat{x}^2} = 2 > 0 \quad (56)$$

Remarque 10 On remarquera que l'expression 55 est tout à fait générale. Elle correspond aussi à l'estimation en moyenne quadratique établie précédemment.

6 Comparaison d'estimateurs sur un exemple simple

Supposons donné un signal discret x de forme connue s , de pulsation constante connue, d'amplitude constante a inconnue. Ce signal est sujet à des perturbations : un bruit additif b . L'expression de x se met donc sous la forme :

$$x(n) = as(n) + b(n) \quad (57)$$

Le but de l'estimation dans ce cas est de déterminer une estimée \hat{a} de a . Notons que dans ce cas a n'est pas aléatoire, il est simplement inconnu. Nous allons déterminer plusieurs estimateurs selon les connaissances disponibles du bruit b .

6.1 Estimation du pauvre

La seule information sur b est que le bruit est centré ($E[b(n)] = 0$). On prend alors comme fonction coût à minimiser une fonction quadratique Q :

$$Q(a) = (x^T - (as)^T)M(x - as) \quad (58)$$

$$= (x^T - s^T a^T)M(x - as) \quad (59)$$

M est une matrice de pondération dont le choix peut être quelconque.

Remarque 11 On remarquera que dans le cas où $M = I$, la minimisation de Q équivaut à la minimisation de la variance (puissance) du bruit ($b = x - as$).

$$Q(a) = \|x - as\|^2 \quad (60)$$

La dérivation de Q par rapport à a donne :

$$\frac{dQ}{da} = \frac{d}{da} (x^T Mx - x^T Mas - s^T a^T Mx + s^T a^T Mas) \quad (61)$$

$$= -s^T M^T x - s^T Mx + (s^T M^T s)a + (s^T Ms)a \quad (62)$$

Supposons que M est symétrique, ($M = M^T$)

$$\frac{dQ}{da} = -2s^T M^T x + 2(s^T Ms)a \quad (63)$$

Le minimum est donc obtenu pour :

$$\hat{a} = ((s^T Ms)^{-1} s^T M^T) x \quad (64)$$

On remarquera que l'estimateur obtenu est linéaire, mais il n'y a aucune indication quant au choix de la matrice M .

Remarque 12 Dans le cas $M = I$,

$$\hat{a} = ((s^T s)^{-1} s^T) x \quad (65)$$

$$= (\Gamma_x^{-1} s^T) x \quad (66)$$

6.2 Connaissance de b au second ordre

On suppose que b est centré et que la matrice de variance covariance $\Gamma_b = E[bb^T]$ est connue. On impose alors à l'estimateur les conditions suivantes

1. estimateur sans biais
2. estimateur linéaire

3. estimateur à variance minimale

La contrainte de linéarité impose un estimateur de la forme

$$\hat{a} = h^T x \quad (67)$$

L'estimateur devant être sans biais :

$$E[\hat{a}] - a = 0 \quad (68)$$

$$= h^T E[x] - a \quad (69)$$

$$= h^T E[as + b] - a \quad (70)$$

Comme seul b est aléatoire dans l'expression précédente, on peut écrire :

$$E[\hat{a}] - a = h^T as - a + E[b] \quad (71)$$

$$= a(h^T s - 1) \quad (72)$$

car b est centré. On en déduit donc la contrainte

$$h^T s = 1 \quad (73)$$

Écrivons maintenant la variance de l'erreur d'estimation

$$V(\tilde{a}) = E[(a - \hat{a})^2] \quad (74)$$

$$= E[(a - h^T x)^2] \quad (75)$$

$$= E[(a - h^T(as + b))^2] \quad (76)$$

$$= E[(a - h^T as + h^T b)^2] \quad (77)$$

La contrainte de linéarité (équation 73) entraîne

$$V(\tilde{a}) = E[(h^T b)^2] \quad (78)$$

$$= h^T E[bb^T] h \quad (79)$$

$$= h^T \Gamma_b h \quad (80)$$

Le problème de la détermination de l'estimateur est donc un problème d'optimisation avec contrainte :

$$h = \text{Arg min}_h h^T \Gamma_b h \quad \text{avec} \quad h^T s = 1 \quad (81)$$

Pour trouver le minimum, il suffit d'appliquer l'inégalité de Schwartz pour les produits scalaires :

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \cdot \langle v, v \rangle \quad (82)$$

On sait que l'égalité a lieu lorsque les vecteurs sont colinéaires. Prenons comme produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = u^T \Gamma_b v \quad (83)$$

et appliquons l'inégalité de Schwarz avec $u = h$ et $v = \Gamma_b^{-1} s$:

$$h^T \Gamma_b \Gamma_b^{-1} s \leq (h^T \Gamma_b h) (s^T \Gamma_b^{-1} \Gamma_b \Gamma_b^{-1} s) \quad (84)$$

$$1 \leq (h^T \Gamma_b h) (s^T \Gamma_b^{-1} s) \quad (85)$$

On en déduit donc que

$$V(\tilde{a}) \geq (s^T \Gamma_b^{-1} s)^{-1} \quad (86)$$

On montre alors que le minimum est atteint pour une valeur de h particulière. Pour cela il faut que les vecteurs u et v soient colinéaires, c'est-à-dire :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} / u = \lambda v \quad (87)$$

$$h = \lambda \Gamma_b^{-1} s \quad (88)$$

$$h^T = \lambda s^T \Gamma_b^{-1} \quad (89)$$

Sachant que $h^T s = 1$,

$$1 = \lambda (s^T \Gamma_b^{-1} s)$$

d'où

$$\lambda = (s^T \Gamma_b^{-1} s)^{-1} \quad (90)$$

$$h = \lambda \Gamma_b^{-1} s = (s^T \Gamma_b^{-1} s)^{-1} \Gamma_b^{-1} s \quad (91)$$

et

$$\hat{a} = \left[(s^T \Gamma_b^{-1} s)^{-1} \Gamma_b^{-1} s \right] x \quad (92)$$

On constate que les équations (64) et (92) sont identiques pour $M = \Gamma_b^{-1}$. La seule différence avec le cas précédent est que le choix de M n'est plus libre.

7 Éléments d'estimation non-bayésienne

Dans ce cas, l'estimateur est aussi appelé estimateur du maximum de vraisemblance. Rappelons que dans l'estimation bayésienne, la connaissance de la loi $p(x)$ du paramètre à estimer est nécessaire puisqu'on utilise la relation :

$$p(y, x) = p(y/x)p(x) \quad (93)$$

Pour l'estimation non bayésienne, on recherche simplement \hat{x} estimée de x qui maximise la loi de probabilité adjointe $p(y, x)$:

$$\hat{x} = \arg \max_x (p(y, x)) \quad (94)$$

Maximiser $p(y, x)$ est équivalent à maximiser n'importe quelle fonction monotone (croissante) de $p(y, x)$. On utilise le plus souvent le logarithme et on parle alors de Log de vraisemblance :

$$\hat{x} = \arg \max_x \log (p(y, x)) \quad (95)$$

La condition du maximum s'écrit alors :

$$\frac{\partial \log (p(y, x))}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}} = 0 \quad (96)$$

Exemple 6 Soit un signal y aléatoire vectoriel à distribution Gaussienne (normale), centré et de variance :

$$\Gamma = \sigma^2 R \quad (97)$$

On désire estimer la puissance σ^2 du signal.

La distribution étant Gaussienne, on peut écrire :

$$p(y, \sigma) = \alpha \sigma^{-N} \exp \left(-\frac{y^T R^{-1} y}{2\sigma^2} \right) \quad (98)$$

Le Log de vraisemblance vaut :

$$\log(p(y, \sigma)) = \log \alpha - N \log \sigma - \frac{y^T R^{-1} y}{2\sigma^2} \quad (99)$$

$$\frac{\partial \log(p(y, \sigma))}{\partial \sigma} = -\frac{N}{\sigma} + \frac{y^T R^{-1} y}{\sigma^3} = 0 \quad (100)$$

On en déduit l'estimation de la puissance au sens du maximum de vraisemblance :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{y^T R^{-1} y}{N} \quad (101)$$

On peut calculer le biais de cet estimateur et remarquer que celui-ci est non biaisé :

$$E[\hat{\sigma}^2] = \frac{1}{N} E[y^T R^{-1} y] = \frac{1}{N} E[\text{trace}(R^{-1} y y^T)] \quad (102)$$

$$= \frac{1}{N} \text{trace}(R^{-1} E[yy^T]) \quad (103)$$

$$= \frac{1}{N} \text{trace}(R^{-1} \sigma^2 R) \quad (104)$$

$$= \sigma^2 \quad (105)$$

Chapitre 4 Estimation spectrale

1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons vu apparaître différentes quantités $E[x]$, $E[xx^T]$, $S_{xx}(f)$, ...

Ces quantités sont impossibles à calculer sur un ordinateur car elles nécessiteraient un nombre de points infini et donc un temps de calcul infini. A titre d'exemple nous avons les égalités suivantes :

$$E[x] = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} p(x_k)x_k \quad (1)$$

ou

$$E[x] = \int_{\Omega} x.p(\omega)d\omega \quad (2)$$

Sur calculateur, on ne dispose que d'une séquence discrète et finie de N points x_0, x_1, \dots, x_{N-1} .

En réalité, on calcule des estimées de ces grandeurs en supposant généralement le signal stationnaire et ergodique. On remplace alors le calcul des moyennes statistiques par des moyennes temporelles.

2 Estimation de la moyenne $E[x]$

Soit N échantillons $[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$ d'un signal aléatoire. On définit l'estimée \hat{m} de $E[x]$ par

$$\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \quad (3)$$

On remarque donc qu'on remplace la moyenne statistique par la moyenne temporelle sur la séquence finie.

Montrons que cet estimateur est non biaisé :

$$E[\hat{m}] = E\left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k\right] \quad (4)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E[x_k] \quad (5)$$

Le signal étant stationnaire, $\forall k, E[x_k] = m$. D'où :

$$E[\hat{m}] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} m \quad (6)$$

$$= m \quad (7)$$

L'estimateur est donc non biaisé. Que vaut maintenant la variance de l'erreur d'estimation $V(\hat{m}) = E[(m - \hat{m})^2]$? L'estimateur étant non biaisé, on peut aussi écrire :

$$V(\hat{m}) = E[(\hat{m} - m)^2] \quad (8)$$

$$= E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - m)\right)^2\right] \quad (9)$$

Supposons de plus que les x_k sont indépendants et stationnaires au second ordre ($E[x_k^2]$ est indépendant de k). Remarquons de plus que le signal $(x_k - m)$ étant centré, on a par conséquent pour $i \neq j$:

$$E[(x_i - m)(x_j - m)] = E[(x_i - m)] E[(x_j - m)] \quad (10)$$

$$= 0 \quad (11)$$

d'où

$$V(\hat{m}) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} E[(x_k - m)^2] \quad (12)$$

$$= \frac{\sigma^2}{N} \quad (13)$$

On remarque que cette variance est asymptotiquement nulle :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} V(\hat{m}) = 0 \quad (14)$$

Définition 1 *Un estimateur est dit consistant s'il vérifie les deux propriétés suivantes*

- *Le biais tend asymptotiquement vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$.*
- *La variance tend asymptotiquement vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$.*

L'estimateur de la moyenne statistique est donc consistant.

3 Estimateur de variance σ^2

Par définition, la variance d'un signal aléatoire x est donnée par :

$$\sigma^2 = E[(x - E(x))^2] \quad (15)$$

$$= E[x^2] - E[x]^2 \quad (16)$$

Supposons que l'on connaisse la moyenne $m = E[x]$, alors l'estimateur de variance prend la forme :

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - m)^2 \quad (17)$$

Dans le cas où la moyenne m est inconnue, on la remplace par son estimée \hat{m} . L'équation précédente sera remplacée par :

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_k - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \right)^2 \quad (18)$$

Calculons le biais des deux estimateurs :

$$E [\hat{\sigma}_1^2] = E \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - m)^2 \right] \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E [(x_k - m)^2] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned} \quad (20)$$

Le premier estimateur est donc non biaisé. Le signal aléatoire a été supposé stationnaire :

$$\forall k, E [(x_k - m)^2] = \sigma^2 \quad (21)$$

Pour le deuxième estimateur, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} E [\hat{\sigma}_2^2] &= E \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_k - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E \left[\left(x_k - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E \left[\left((x_k - m) - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (x_j - m) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Cette écriture permet de reconnaître le signal aléatoire $(x_k - m)$ qui est cette fois ci centré. De plus le signal étant ergodique et les échantillons indépendants, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} E [\hat{\sigma}_2^2] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[E [(x_k - m)^2] + \frac{1}{N^2} E \left[\left(\sum_{j=0}^{N-1} (x_j - m) \right)^2 \right] - \frac{2}{N} E [(x_k - m)^2] \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{N} - \frac{2\sigma^2}{N} \right] \\ &= \frac{N-1}{N} \sigma^2 \end{aligned} \quad (22)$$

Cet estimateur est donc biaisé, mais il est consistant car

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} E [\hat{\sigma}_2^2] = \sigma^2 \quad (23)$$

4 Estimateur de la fonction d'autocorrélation

Rappelons que dans le cas discret, la fonction d'autocorrélation d'un signal aléatoire x , supposé ergodique, est définie par

$$R_{xx}(k) = E [x_n x_{n+k}] \quad (24)$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{n=N} x_n x_{n+k} \quad (25)$$

Plusieurs estimateurs sont alors possibles

- Le premier ne tient pas compte du nombre d'échantillons disponibles qui varie avec le pas k :

$$\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{n=N} x_n x_{n+k} \quad (26)$$

Dans ce cas, on suppose que l'on dispose de la suite des échantillons du signal de longueur $(2N+1)$:

$$[x_{-N}, x_{-N+1}, \dots, x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N]$$

Cet estimateur est évidemment biaisé.

- Un deuxième estimateur prend en compte le nombre des échantillons restant à l'indice k . De plus, sachant que la fonction d'autocorrélation est paire, il suffit de la calculer pour des valeurs de k positives. En supposant disponible la séquence du signal de N points $[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$. On écrira alors :

$$\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} x_n x_{n+k} \quad (27)$$

On montre que cet estimateur est non biaisé. Il suffit pour cela d'écrire

$$E[\hat{R}_{xx}(k)] = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} E[x_n x_{n+k}] \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} R_{xx}(k) \\ &= R_{xx}(k) \end{aligned} \quad (29)$$

On démontre que la variance de cet estimateur tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Cet estimateur est donc consistant.

5 Estimateur de densité spectrale

Par définition, dans le cas continu :

$$S_{xx}(f) = TF[R_{xx}(\tau)] \quad (30)$$

Dans le cas discret :

$$S_{xx}(\nu) = TF[R_{xx}(k)] \quad (31)$$

5.1 Méthode du périodogramme

Supposons que l'on dispose d'une séquence de N points du signal aléatoire x

$$[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$$

La séquence étant finie, l'opération mathématique qui consiste à isoler cette séquence du signal initial à support infini s'appelle la troncature. Ceci revient à multiplier le signal par une fenêtre rectangulaire. La transformée de Fourier calculée sur la séquence finie sera donc convoluée avec le spectre de la fenêtre rectangulaire c'est-à-dire un sinus cardinal. Or les propriétés spectrales du sinus cardinal ne sont pas bien adaptées à l'analyse spectrale du signal. On effectue alors des pondérations par des fenêtres de types différents telles que les fenêtres de Hamming, de Hanning, de Kaiser ou de Bartlett. On dit que ces fenêtres ont un effet adoucissant sur le signal.

Soit y_k la séquence obtenue à partir de la séquence x_k pondérée par la fenêtre f_k :

$$y_k = x_k \times f_k \quad (32)$$

On calcule une estimée de la densité spectrale par :

$$\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{N} |Y(f)|^2 \quad (33)$$

avec

$$Y(f) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi j f k} \quad (34)$$

d'où

$$\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{N} Y(f) Y^*(f) \quad (35)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi j f k} \sum_{l=0}^{N-1} y_l e^{+2\pi j f l} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} y_k y_l e^{-2\pi j f (k-l)} \end{aligned} \quad (36)$$

Posons maintenant $i = k - l$, alors :

$$\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} y_k y_{k-i} e^{-2\pi j f i} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{N-1} R_{yy}(i) e^{-2\pi j f i} \\ &= TF [R_{yy}(i)] \end{aligned} \quad (38)$$

La méthode du périodogramme revient en quelque sorte à prendre la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Le problème de cet estimateur est que la variance ne tend pas vers 0 quand N tend vers l'infini.

Une solution est le périodogramme moyenné. On subdivise la séquence en M sous-séquences de longueur L . On calcule alors les périodogrammes sur chacune des sous-séquences et on calcule finalement le périodogramme en moyennant les périodogrammes précédents. La longueur et le nombre des sous séquences sont liés par la relation :

$$N = M.L \quad (39)$$

Pour augmenter le nombre des sous séquences, il arrive qu'on les fasse se chevaucher (overlapping) sur une longueur $D < L$. On aura la relation :

$$(M - 1)(L - D) + L = N \quad (40)$$

On remarque que le biais diminue quand L augmente mais la variance quant à elle diminue si M augmente. Pour N donné, un compromis est alors nécessaire (équation 39). On choisit généralement :

$$M = \frac{2N}{L} \quad (41)$$

Dans ce cas particulier, cette méthode s'appelle méthode de Welch. Les figures ci-dessous donnent quelques exemples de fenêtres de pondération dont les qualités peuvent être évaluées à partir de la largeur du lobe principal et la hauteur des lobes secondaires du spectre en amplitude.

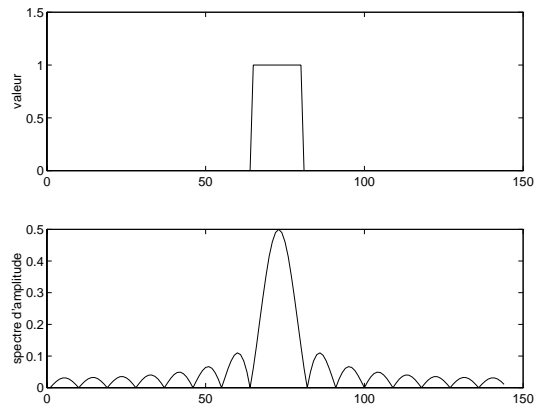


FIG. 1: fenêtre rectangulaire

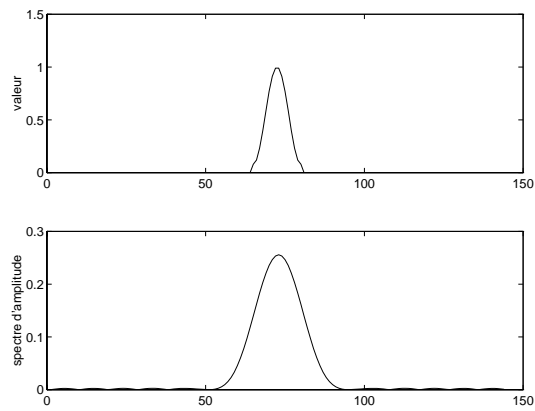


FIG. 2: Fenêtre de Hamming

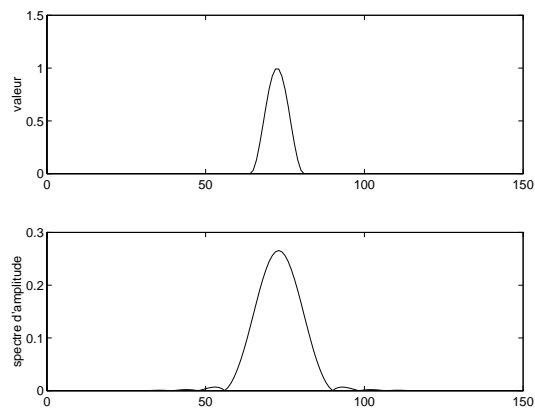


FIG. 3: Fenêtre de Hanning

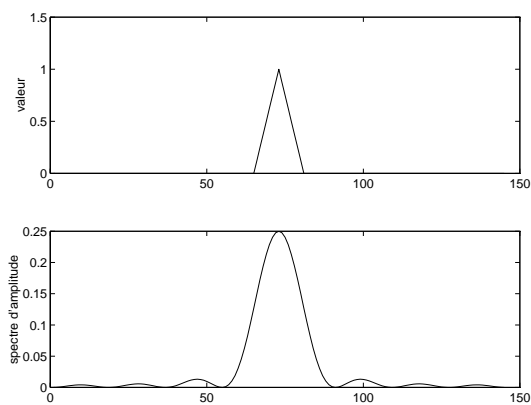


FIG. 4: Fenêtre triangulaire

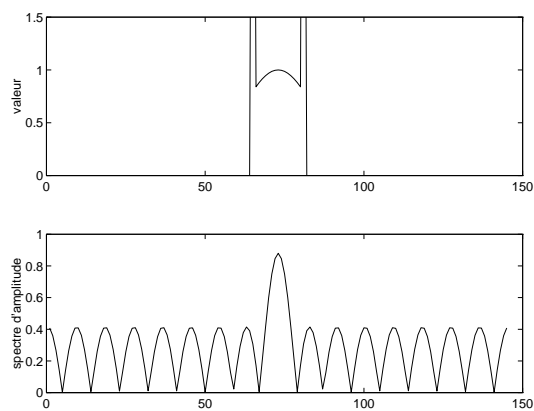


FIG. 5: Fenêtre de Chebychev

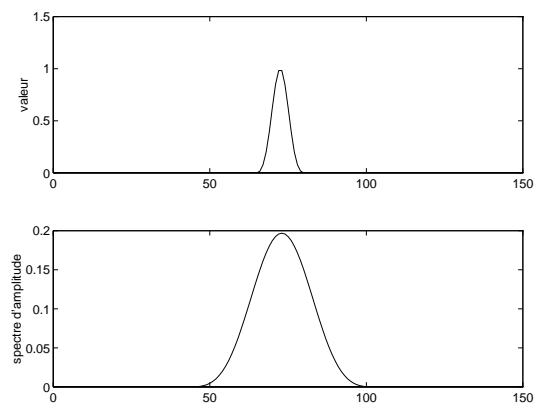


FIG. 6: Fenêtre de Blackman

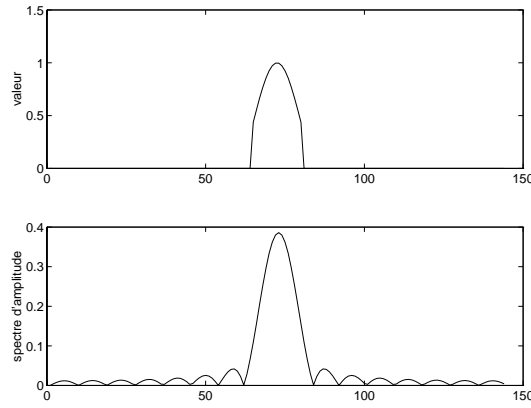


FIG. 7: Fenêtre de Kaiser

5.2 Méthode du corrélogramme

Cette méthode consiste à calculer d'abord l'estimée $\hat{R}_{xx}(k)$ de la fonction d'autocorrélation puis à prendre pour estimée de la densité spectrale la transformée de Fourier de $\hat{R}_{xx}(k)$.

$$\hat{S}_{xx}(f) = TF \left[\hat{R}_{xx}(k) \right] \quad (42)$$

Cette méthode est appelée méthode de Blackman-Tuckey. On démontre que cet estimateur est consistant.

5.3 Méthode du modèle

Dans cette méthode, on recherche un modèle AR, MA ou ARMA pour la séquence x_k . Dans le cas d'un modèle auto-régressif, on écrit

$$x_k = a_1 x_{k-1} + \dots + a_r x_{k-r} + u_k \quad (43)$$

ou u_k est un bruit blanc. La fonction de transfert du filtre est donnée par

$$H(z) = \frac{X(z)}{U(z)} \quad (44)$$

$$= \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_r z^{-r}} \quad (45)$$

On dit que le filtre $H(z)$ est le filtre formeur de x . On calcule alors l'estimée de la densité spectrale par la relation

$$\hat{S}_{xx}(f) = |H(f)|^2 S_{uu}(f) \quad (46)$$

en remplaçant z par $e^{2\pi j f}$.

Le signal d'entrée u étant blanc, sa densité spectrale est constante

$$S_{uu}(f) = U_0 \quad (47)$$

Nous avons finalement

$$\hat{S}_{xx}(f) = \left| \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^r a_k e^{-2\pi j f k}} \right|^2 U_0 \quad (48)$$

Cette méthode fournit généralement de meilleurs résultats que les méthodes précédentes.

Chapitre 5 Méthodes récursives dans le temps

1 Introduction

La relation entrée-sortie d'un filtre linéaire et stationnaire est donnée par :

$$y(k) = \sum_l h(l)u(k-l) \quad (1)$$

Cette équation n'est pas récursive, le calcul de y à l'instant $(k-1), (k-2)...$ ne sert pas au calcul de $y(k+1)$.

Le calcul à chaque instant de la convolution est coûteux en temps de calcul. On tente ici de trouver d'autres formes plus économiques en calcul.

Un système est dit récursif d'ordre r et de mémoire p si on peut écrire la relation précédente sous la forme :

$$y(k) = \mathbf{f} [y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-r), u(k), u(k-1), \dots, u(k-p)] \quad (2)$$

C'est le type d'équation déjà rencontrée lors de l'étude du modèle ARMA. Par contre dans ce cas là, les coefficients peuvent être variables avec le temps.

2 Exemple

La formule de la moyenne d'un signal est la suivante :

$$y(k) = \frac{1}{k} \sum_{1 \leq i \leq k} x(i)$$

Après manipulation on trouve :

$$y(k+1) = \frac{1}{k+1} k y(k) + \frac{1}{k+1} x(k+1) \quad (3)$$

qui peut être mise sous une autre forme :

$$y(k+1) = y(k) + \frac{1}{k+1} [x(k+1) - y(k)] \quad (4)$$

On voit donc apparaître un terme d'erreur appelé aussi terme de correction. L'intérêt de ces méthodes est évident. Dans ce cas là, il suffit d'une mise en mémoire (la sortie $y(k)$) et d'une multiplication par un coefficient pour avoir la sortie à l'instant $(k+1)$.

3 Récurrence temporelle sur les équations normales

Rappelons la forme des équations normales :

$$\Gamma.a = c \quad (5)$$

Supposons que l'on veuille résoudre cette équation pour la prédiction à l'ordre r d'un signal dont la fonction d'autocorrélation est inconnue. Une solution est de remplacer Γ et c par leur estimation. L'estimation la plus courante est la moyenne temporelle entre l'instant de début de l'expérience et l'instant présent n . On a donc :

$$\Gamma_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} X_i X_i^T \quad (6)$$

$$c_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} x_i X_i \quad (7)$$

La présence de X_1 nécessite la connaissance de $x_0, x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{-r+1}$

Le facteur n peut être éliminé car il s'élimine dans l'équation normale précédente. On établit de plus que :

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \Gamma_{n-1} + X_n X_n^T \\ c_n &= c_{n-1} + x_n X_n \end{aligned} \quad (8)$$

Le vecteur de régression a_n est donné par :

$$a_n = \Gamma_n^{-1} c_n \quad (9)$$

Théorème 1 Nous avons :

$$[A + b.b^T]^{-1} = A^{-1} - \gamma A^{-1} b.b^T A^{-1}$$

avec

$$\gamma = (1 + b^T A^{-1} b)^{-1}$$

Appliquons le théorème précédent à $A = \Gamma_{n-1}$ et $b = X_n$. En posant $K = \Gamma_n^{-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} K_n &= K_{n-1} - \gamma_n K_{n-1} X_n X_n^T K_{n-1} \\ \gamma_n &= (1 + X_n^T K_{n-1} X_n)^{-1} \end{aligned} \quad (10)$$

En remplaçant on a aussi,

$$K_n X_n = \gamma_n K_{n-1} X_n \quad (11)$$

d'où :

$$K_n = K_{n-1} - K_n X_n X_n^T K_{n-1} \quad (12)$$

finalement :

$$\begin{aligned} a_n &= K_n c_n \\ a_n &= a_{n-1} + K_n X_n (x_n - a_{n-1}^T X_n) \end{aligned} \quad (13)$$

Ces algorithmes sont récursifs. De la connaissance de a_{n-1} , K_{n-1} et X_{n-1} , on déduit de la nouvelle observation x_n , la valeur de K_n puis celle de a_n . La récurrence est donc double.

La récurrence ne peut pas commencer à $n = 1$ car la matrice Γ_1 est de rang 1 et n'est donc pas inversible. Elle ne peut commencer qu'au rang r qui est le rang minimal pour que Γ soit de rang r .

Le terme suivant représente le résidu estimé :

$$\tilde{x} = x_n - a_{n-1}^T X_n \quad (14)$$

différence entre le signal reçu à l'instant n et sa meilleure estimée.

La matrice de gain K_n doit tendre vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Si le signal est strictement stationnaire alors a convergera vers la solution de l'équation :

$$a = \Gamma^{-1} c \quad (15)$$

et

$$a_n - a_{n-1} \rightarrow 0 \quad (16)$$

On a donc une méthode récursive qui converge asymptotiquement vers la valeur exacte. Mais cette convergence est à l'infini, ce qui suppose donc une observation infinie. Généralement, on lui préfère une observation de durée finie, quitte à avoir une fluctuation résiduelle due au nombre fini d'échantillons.

$$\Gamma_n = \frac{1}{P} \sum_{n-P-1 \leq i \leq n} X_i X_i^T \quad (17)$$

$$c_n = \frac{1}{P} \sum_{n-P-1 \leq i \leq n} x_i X_i \quad (18)$$

En fait, il est beaucoup plus commode d'introduire un facteur d'oubli sur les équations de récurrence ($\alpha < 1$) :

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \alpha \Gamma_{n-1} + X_n X_n^T \\ c_n &= \alpha c_{n-1} + x_n X_n \end{aligned} \quad (19)$$

Il suffit alors de reporter ces équations dans les équations précédentes et on aboutit à l'algorithme

$$a_n = a_{n-1} + k_n X_n (x_n - a_{n-1}^T X_n) \quad (20)$$

Algorithme simple, utilisé en filtrage adaptatif.

4 Méthode des moindres carrés récursifs

Problème : Calculer a_n tel que la quantité T_n soit minimale.

$$T_n = \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - a_n^T X_i)^2$$

En développant, on obtient :

$$T_n = a_n^T M_n a_n - 2a_n^T v_n s_n^2 \quad (21)$$

$$M_n = \sum_{1 \leq i \leq n} X_i X_i^T \quad (22)$$

$$v_n = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i X_i \quad (23)$$

$$s_n^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2 \quad (24)$$

Le minimum est atteint pour :

$$M_n a_n = v_n \quad (25)$$

5 Filtrage de Kalman

Le filtrage de Kalman permet de résoudre les problèmes de prédiction à un pas et d'estimation de manière récursive dans le temps.

Le processus doit être décrit par un modèle linéaire sous forme de représentation d'état constitué d'une équation d'état et d'une équation d'observation ou de mesure :

$$\begin{cases} \underline{X}_{k+1} = A_k \cdot \underline{X}_k + \underline{U}_k + \underline{G}_k \\ \underline{Y}_k = C_k \cdot \underline{X}_k + \underline{W}_k \end{cases} \quad (26)$$

Le bruit d'état \underline{G}_k et le bruit de mesure \underline{W}_k sont supposés blancs, centrés et de variances :

$$\begin{cases} \Gamma_k = E(\underline{G}_k \cdot \underline{G}_k^T) \\ \Omega_k = E(\underline{W}_k \cdot \underline{W}_k^T) \end{cases} \quad (27)$$

On résoud simultanément un problème de prédiction et un problème d'estimation. La récursivité se décompose en trois étapes

- prédiction de \underline{X}_{k+1} à partir de $\underline{Y}_0, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_k$. La valeur prédite sera notée $\underline{X}_{k+1/k}$ (valeur prédite de \underline{X}_{k+1} connaissant les observations précédentes jusqu'à k).
- nouvelle mesure \underline{Y}_{k+1} .
- estimation de \underline{X}_{k+1} grâce à $\underline{X}_{k+1/k}$ et \underline{Y}_{k+1} . L'estimée sera notée $\underline{X}_{k+1/k+1}$.

5.1 Équations des filtres

Supposons qu'à l'instant k on dispose des mesures $\underline{Y}_0, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_k$ et de l'estimée $\underline{X}_{k/k}$. Le bruit d'état $\underline{G}(k)$ étant centré et indépendant des $\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots, \underline{X}_k$, sa meilleure prédiction sera nulle. La meilleure prédiction à l'instant $(k+1)$ sera donc obtenue en appliquant l'équation de récurrence sans le bruit

$$\underline{X}_{k+1/k} = A_k \cdot \underline{X}_{k/k} + \underline{U}_k \quad (28)$$

De l'équation précédente, on déduit une prédiction de la mesure à l'instant $(k+1)$ par

$$\underline{Y}_{k+1/k} = C_{k+1} \underline{X}_{k+1/k} \quad (29)$$

Une estimation de $\underline{X}_{k+1/k+1}$ est alors obtenue en utilisant un terme correctif

$$\underline{X}_{k+1/k+1} = \underline{X}_{k+1/k} + H_{k+1} \cdot \left(\underline{Y}_{k+1} - C_{k+1} \cdot \underline{X}_{k+1/k} \right) \quad (30)$$

H_k est appelé gain du filtre.

Des équations précédentes, on déduit les équations des filtres

– prédicteur (figure 1) :

$$\underline{X}_{k+1/k} = A_k \cdot \underline{X}_{k/k-1} + \underline{U}_k + A_k H_k \left(\underline{Y}_k - C_k \cdot \underline{X}_{k/k-1} \right) \quad (31)$$

– et estimateur :

$$\underline{X}_{k+1/k+1} = A_k \cdot \underline{X}_{k/k} + \underline{U}_k + H_{k+1} \left(\underline{Y}_{k+1} - C_{k+1} \cdot \left(A_k \cdot \underline{X}_{k/k} + \underline{U}_k \right) \right) \quad (32)$$

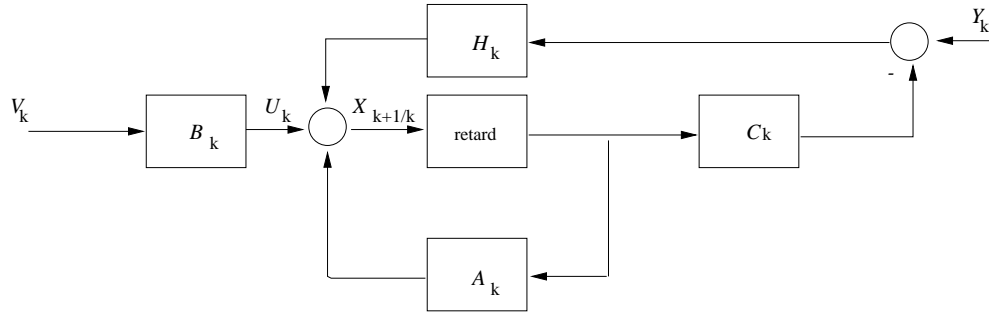


FIG. 1: Structure du filtre de Kalman

5.2 Détermination du gain du filtre

Définissons les erreurs de prédiction et d'estimation

$$\xi_{k+1/k} = \underline{X}_{k+1} - \underline{X}_{k+1/k} \quad (33)$$

$$\xi_{k+1/k+1} = \underline{X}_{k+1} - \underline{X}_{k+1/k+1} \quad (34)$$

Écrivons alors que l'estimateur doit être sans biais et à variance minimale

– biais nul (filtre prédicteur et filtre estimateur)

$$E [\xi_{k+1/k}] = 0 \quad (35)$$

$$E [\xi_{k+1/k+1}] = 0 \quad (36)$$

– variance minimale (filtre prédicteur et filtre estimateur)

$$\Sigma_{k+1/k} = E \left[\xi_{k+1/k} \cdot \xi_{k+1/k}^T \right]$$

$$\Sigma_{k+1/k+1} = E \left[\xi_{k+1/k+1} \cdot \xi_{k+1/k+1}^T \right]$$

En laissant le soin au lecteur attentionné de développer les calculs et en utilisant les équations des filtres et les deux équations précédentes, on aboutit aux équations de récurrence

$$\Sigma_{k+1/k} = A_k \Sigma_{k/k} A_k^T + \Gamma_k \quad (37)$$

$$\Sigma_{k+1/k+1} = [I - H_{k+1} C_{k+1}] \Sigma_{k+1/k} [I - H_{k+1} C_{k+1}]^T + H_{k+1} \Omega_{k+1} H_{k+1}^T \quad (38)$$

On remarquera que la première équation ne dépend pas directement de H_k . C'est donc la deuxième équation qui servira à calculer la valeur de H_{k+1} qui la rend minimale. Après quelques lignes de calculs, on obtient

$$H_{k+1} = \Sigma_{k+1/k} \cdot C_{k+1}^T (\Omega_{k+1} + C_{k+1} \cdot \Sigma_{k+1/k} C_{k+1}^T)^{-1} \quad (39)$$

La valeur du minimum vaut alors

$$\Sigma_{k+1/k+1} = [I - H_{k+1} C_{k+1}] \Sigma_{k+1/k} \quad (40)$$

On obtient finalement la variance de l'erreur de prédiction

$$\Sigma_{k+1/k} = A_k [I - H_k C_k] \Sigma_{k/k-1} A_k^T + \Gamma_k \quad (41)$$

5.3 Résumé

Finalement les équations des filtres de Kalman prédicteur et estimateur peuvent être obtenues par la récurrence temporelle suivante

– initialisation

$$\underline{X}_{0/0} = E[\underline{X}_0] \quad (42)$$

$$\underline{\Sigma}_{0/0} = \Lambda_0 \quad (43)$$

– récurrence au pas $(k + 1)$, on détermine dans l'ordre

$$\Sigma_{k+1/k} = A_k \Sigma_{k/k} A_k^T + \Gamma_k \quad (44)$$

$$H_{k+1} = \Sigma_{k+1/k} \cdot C_{k+1}^T (\Omega_{k+1} + C_{k+1} \cdot \Sigma_{k+1/k} C_{k+1}^T)^{-1} \quad (45)$$

$$\underline{X}_{k+1/k} = A_k \cdot \underline{X}_{k/k} + \underline{U}_k \quad (46)$$

$$\underline{X}_{k+1/k+1} = \underline{X}_{k+1/k} + H_{k+1} \cdot (\underline{Y}_{k+1} - C_{k+1} \cdot \underline{X}_{k+1/k}) \quad (47)$$

$$\Sigma_{k+1/k+1} = [I - H_{k+1} C_{k+1}] \Sigma_{k+1/k} \quad (48)$$

Chapitre 6 Identification paramétrique

1 Introduction

Considérons le schéma général d'identification donné par la figure 1

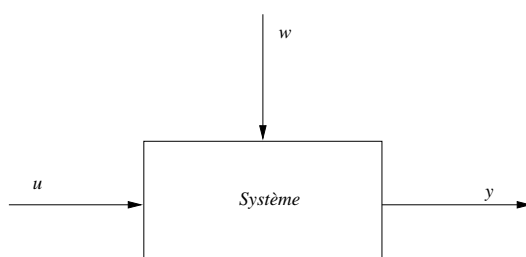


FIG. 1: modèle général d'identification

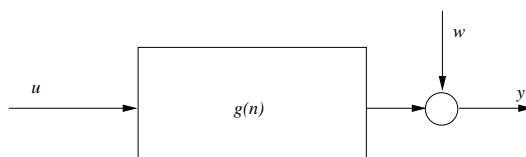


FIG. 2: Signaux exogènes en sortie

où le vecteur u représente le vecteur des entrées (signaux utiles), le vecteur w est le vecteur des entrées exogènes et y le vecteur des sorties ou des mesures. On supposera dans la suite que les entrées exogènes sont ramenées en sortie (figure 2). On peut alors écrire :

$$y(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} g(k)u(n-k) + w(n) \quad (1)$$

La réponse fréquentielle du filtre est donnée par :

$$G(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} g(k)z^{-k} \quad (2)$$

On note souvent aussi l'opérateur z par q . On adopte alors une écriture plus compacte de (1) sous la forme :

$$y(n) = G(q)u(n) + w(n) \quad (3)$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, il est toujours possible de générer l'entrée w à partir d'un bruit blanc e et d'un filtre $H(q)$. L'équation (3) devient alors :

$$y(n) = G(q)u(n) + H(q)e(n) \quad (4)$$

2 Les modèles polynomiaux

Les modèles polynomiaux généralement adoptés sont au nombre de 4.

2.1 Modèle ARX

Dans ce cas, nous avons :

$$G(q) = q^{-k_0} \frac{B(q)}{A(q)} \quad \text{et} \quad H(q) = \frac{1}{A(q)} \quad (5)$$

avec

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_p q^{-p} \quad (6)$$

$$B(q) = b_1 + b_2 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m+1} \quad (7)$$

Le modèle présente donc un retard pur d'ordre k_0 , il est récursif d'ordre p et à passé m . Le modèle s'écrit :

$$A(q)y(n) = B(q)u(n - k_0) + e(n) \quad (8)$$

2.2 Modèle ARMAX

Dans ce cas, nous avons :

$$G(q) = q^{-k_0} \frac{B(q)}{A(q)} \quad \text{et} \quad H(q) = \frac{C(q)}{A(q)} \quad (9)$$

avec

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_l q^{-l} \quad (10)$$

Le modèle s'écrit :

$$A(q)y(n) = B(q)u(n - k_0) + C(q)e(n) \quad (11)$$

2.3 Modèle à erreur de sortie

$$y(n) = \frac{B(q)}{F(q)}u(n - k_0) + e(n) \quad (12)$$

avec

$$F(q) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_j q^{-j} \quad (13)$$

2.4 Modèle de Box-Jenkins

$$y(n) = \frac{B(q)}{F(q)}u(n - k_0) + \frac{C(q)}{D(q)}e(n) \quad (14)$$

3 Modèle d'états

Plusieurs modèles sous forme d'équations d'état sont aussi possibles. Nous en citons deux :

$$\begin{cases} x(n+1) = Ax(n) + Bu(n) + Ke(n) \\ y(n) = Cx(n) + Du(n) + e(n) \end{cases} \quad (15)$$

dans ce cas, e est un bruit blanc

$$\begin{cases} x(n+1) = Ax(n) + Bu(n) + w(n) \\ y(n) = Cx(n) + Du(n) + e(n) \end{cases} \quad (16)$$

dans ce cas, w et e sont deux processus stochastiques quelconques.

Remarque 13 *Les méthodes d'identification seront développées dans un prochain document.*

Deuxième partie
Travaux dirigés

TD 1 : Propriétés des signaux aléatoires

Exercice 1

On considère le signal aléatoire $x(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi)$, où a et ω_0 sont constantes et ϕ est une variable aléatoire équi-répartie sur $[0, 2\pi]$.

1. Calculer $E[x(t)]$ et $\langle x(t) \rangle$.
2. Calculer $E[x(t)x(t - \tau)]$ et $\langle x(t)x(t - \tau) \rangle$. Conclusion.
3. Quelle est la densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$ de $x(t)$? La représenter graphiquement.
4. Quelle est la puissance du signal?

Exercice 2

Soit $x(t)$ un signal aléatoire, stationnaire d'ordre 2, réel. En partant de l'expression

$$E \left[(x(t) \pm x(t - \tau))^2 \right]$$

Montrer que la fonction d'autocorrélation vérifie la relation :

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$$

Exercice 3

Soit le signal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k g(t - kT - \theta)$$

où $\{a_k\}$ est une suite de variables aléatoires telle que

$$E(a_k) = m_a \quad R_{aa}(k) = E[a_n a_{n+k}]$$

$g(t)$ est un signal déterministe, de durée au plus égale à T , d'énergie finie et de transformée de fourier $G(f)$. θ est une variable équirépartie sur $[0, T]$ et indépendante des a_k .

Étudier la stationnarité au sens large de $x(t)$.

TD 2 : Signaux aléatoires vectoriels

Exercice 1 : Matrices définies positives

Soit M une matrice non symétrique. Est-ce que la propriété $M > 0$ entraîne que les valeurs propres sont positives ?

Est-ce que la positivité des valeurs propres entraîne que $M > 0$?

Exercice 2 : Propriétés des matrices de covariance

Soit x une variable aléatoire vectorielle supposée centrée. On définit sa matrice de corrélation (ou matrice de variance covariance) par

$$\Gamma = E [xx^H] \quad \Gamma_{ij} = E [x_i x_j^*]$$

1. Montrer que la matrice Γ est hermitienne.
2. Montrer que Γ est définie non négative.
3. Montrer que les valeurs propres de Γ sont non négatives et les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
4. Montrer que toute matrice hermitienne définie non négative est une matrice de covariance
5. Soit y un vecteur aléatoire obtenu de x par transformation $y = Ax$. Calculer la matrice de covariance de y .
6. Appliquer le résultat précédent dans le cas d'un vecteur x blanc unitaire.

TD 3 : Estimateurs

Exercice 1

Soit Φ une phase aléatoire équirépartie sur $[0, \pi]$. Considérons les variables aléatoires x et y définies par $x = \cos \Phi$ et $y = \sin \Phi$.

1. Calculer les moyennes $E[x]$ et $E[y]$.
2. Calculer les variances de x et y définies respectivement par $\Gamma_x = E[(x - E(x))^2]$ et $\Gamma_y = E[(y - E(y))^2]$.
3. Calculer finalement la covariance de x et y donnée par $E[x.y]$.
4. Donner la meilleure estimation linéaire en moyenne quadratique de y à partir de x . On rappelle la formule identique à celle du cours mais dans le cas où x et y ne sont pas centrés

$$\hat{y} = E[y] + \Gamma_{yx}\Gamma_x^{-1}(x - E[x])$$

Conclure.

5. Donner l'estimée en moyenne quadratique de y . On rappelle :

$$\hat{y} = E(y/x)$$

Exercice 2

Soit t_1 et t_2 deux estimateurs différents du même paramètre θ . On suppose que $E[t_1] = \theta + b_1$ et $E[t_2] = \theta + b_2$ où b_1 et b_2 sont des valeurs numériques connues.

1. Peut-on trouver un estimateur t combinaison linéaire de t_1 et t_2 qui soit sans biais ? On posera

$$t = \alpha t_1 + \beta t_2$$

2. On suppose $b_1 = b_2 = 0$ et $E(t_1.t_2) = 0$. Calculer α et β pour que t soit un estimateur sans biais de variance minimale. Quelle est alors cette variance ?
3. Dans le cas où t_1 et t_2 sont les moyennes empiriques de deux échantillons tirés au hasard d'une même population au cours d'épreuves indépendantes, à quoi correspond l'estimateur t à variance minimale.

Exercice 3

On désire estimer les bornes a et b du domaine de véracité d'une variable aléatoire x uniforme, pour cela on effectue la mesure de N échantillons indépendants $x = [x_1, \dots, x_N]$.

1. Déterminer les estimateurs du maximum de vraisemblance de a et b .
2. Calculer le biais et l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de a . On rappelle que

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{6} N(N+1)(N+2)$$

TD 4 : Estimation et signaux AR

Exercice 1

On considère un mobile se déplaçant à vitesse constante v . Sa position y_n , relevée aux instants nT pour $n \in \{1, \dots, N\}$, est entachée d'un bruit b_n additif, blanc, centré et de variance σ^2 .

On définit l'estimateur empirique $\hat{v}(y)$ qui correspond à la moyenne des vitesses instantanées :

$$\hat{v}(y) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{y_n}{nT}$$

1. Cet estimateur est-il biaisé ?
2. Calculer sa variance $E [(\hat{v}(y) - v)^2]$.

Exercice 2

Soit x_n un signal aléatoire réel, centré et autorégressif d'ordre 3, donné donc par

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + a_3 x_{n-3} + u_n$$

où u_k est un bruit blanc centré de variance σ_u^2 . On notera $\gamma_i = E[x_n x_{n-i}]$

Le but de l'exercice est de calculer les coefficients a_1, a_2 et a_3 .

1. Montrer que le vecteur $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ et σ_u^2 vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} R \cdot a &= c \\ \sigma_u^2 &= \gamma_0 - a^T c \end{aligned}$$

où

$$R = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \end{bmatrix} \text{ et } c = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}$$

2. On suppose que $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$ et $|\gamma_2| < \gamma_0$. Déterminer le vecteur a et la variance du bruit générateur σ_u^2 .
3. En déduire toutes les valeurs de la fonction d'autocorrélation de x .
4. Montrer que $|\gamma_2| \leq \gamma_0$.
5. On suppose maintenant que $\gamma_0 = \gamma_2 = 1$ et que l'on a toujours $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$. Donner la structure du signal x_n et trouver un exemple de trajectoire de ce signal.

TD 5 : Filtrage de Kalman

On désire estimer la position d'un véhicule se déplaçant à vitesse constante. Cette vitesse est perturbée par des vitesses aléatoires. On suppose qu'entre deux instants d'observation, la vitesse est constante. On peut donc écrire

$$v(t) = v_o + \gamma_n$$

pour $t_n < t < t_{n+1}$

L'équation d'état du système donnant la variation de la position s'écrit donc :

$$x_{n+1} = x_n + T.v_o + T.\gamma_n$$

L'équation de mesure s'écrit :

$$y_n = x_n + w_n$$

avec :

$$\begin{aligned} E[\gamma_n.\gamma_n^T] &= \Gamma \\ E[w_n.w_n^T] &= W \end{aligned}$$

On donne :

$$T = 0.1s, W = 100, \Gamma = 1, x_o = 0, \Sigma_0 = 0$$

Donner les équations du filtre de Kalman prédicteur.

Troisième partie
Travaux pratiques

TP 1 Analyse spectrale

1 Troncature et fenêtrage

En utilisant les fonctions *'stem'* et *'subplot'*, tracer les fenêtres de Hamming, Hanning, Boxcar et Kaiser dans le domaine temporel. Ces fenêtres peuvent être générées sous Matlab, par les fonctions du même nom.

Tracer de même le spectre de ces fenêtres ; On utilisera pour cela la fonction *'fftshift'*.

Identifier les compromis entre la décroissance dans le domaine temporel et la largeur du lobe principal, l'amplitude du lobe secondaire et la décroissance des autres lobes.

Pour une fenêtre donnée montrer qu'une fenêtre plus large implique des performances meilleures dans le domaine fréquentiel.

2 Résolution d'une fenêtre

Construire le signal

$$x(n) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t) \quad (1)$$

On prendra comme valeur dans un premier temps $A_1 = A_2 = 1$, $f_1 = 25Hz$ et $f_2 = 50Hz$.

1. Calculer et tracer le périodogramme de x . On utilisera la fonction *'psd'*.
2. Quelle est la résolution fréquentielle ? En d'autres termes jusqu'à quelle limite arrive t-on encore à discerner f_1 de f_2 ?
3. On choisit maintenant $A_1 = 10$ et $A_2 = 1$. Que devient la résolution fréquentielle ? Celle-ci s'améliore t-elle si on pondère le signal par des fenêtres autres que la fenêtre rectangulaire ?
4. Charger le fichier de données bruitées *sig1.mat*. Les tracer avec la fonction *'stem'*.
5. Calculer et tracer le périodogramme non moyenné. On utilisera la fonction *'psd'* avec un tracé logarithmique.
6. Calculer et tracer maintenant le périodogramme du signal multiplié par une fenêtre de type Hamming ou Hanning. Conclure.

3 Densités spectrales de signaux AR et MA

Générer un bruit blanc $b(n)$ à distribution gaussienne ayant 4096 échantillons. On utilisera la fonction *'randn'*. Vérifier que le bruit est bien blanc en calculant sa fonction d'autocorrélation ainsi que sa densité spectrale.

3.1 Signaux MA

Un signal à Moyenne Mobile (Moving average) est obtenu par passage d'un bruit blanc dans un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR).

On considère le filtre de fonction de transfert

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} \quad (2)$$

1. Tracer le spectre de la fonction de transfert.
2. Calculer le signal de sortie $x(n)$, le bruit $b(n)$ étant le signal d'entrée en utilisant la fonction '*filter*'.
3. Calculer et tracer la fonction d'autocorrélation de $x(n)$.
4. Calculer la DSP de $x(n)$. Commentaires.

3.2 Signaux AR

Les signaux AR sont obtenus par passage d'un bruit blanc dans un filtre purement récursif.

On considère le filtre de fonction de transfert

$$H(z) = \frac{0.3}{1 - 0.8z^{-1}}$$

1. Tracer la réponse fréquentielle du filtre.
2. Essayer de prédire la forme de la densité spectrale du signal de sortie.
3. Calculer la réponse du filtre au signal $b(n)$.
4. Tracer sa fonction d'autocorrélation ainsi que sa densité spectrale de puissance. Pourquoi appelle-t-on ce genre de signal bruit blanc coloré.

TP 2 : Estimation spectrale

1 Estimation de la fonction d'autocorrélation

Les deux estimateurs classiques de fonction d'autocorrélation sont données par

– estimateur biaisé

$$\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-|k|} x(n)x(n+k) \quad (1)$$

– estimateur non biaisé

$$\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N-|k|} \sum_{n=1}^{N-|k|} x(n)x(n+k) \quad (2)$$

Pour la fonction d'intercorrrelation, il suffira de remplacer $x(n+k)$ par $y(n+k)$.

Un autre algorithme de calcul de fonction d'autocorrélation est le suivant

- Calcul de la transformée de Fourier $X(k)$ de $x(n)$. Utiliser la fonction '*fft*'.
- Calcul de la densité spectrale $S_{xx}(k) = |X(k)|^2$
- Calcul de la fonction d'autocorrélation par transformée de Fourier inverse

$$\hat{R}_{xx}(k) = \text{ifft}(|X(k)|^2) \quad (3)$$

Application

1. Programmer les trois algorithmes précédents. Les indices des vecteurs sous Matlab ne pouvant être définis qu'à partir de 1, on s'arrangera pour placer $\hat{R}_{xx}(0)$ à l'indice N . La fonction d'autocorrélation étant paire, on aura alors $\hat{R}_{xx}(N+k) = \hat{R}_{xx}(N-k)$ pour $k = 1, \dots, N-1$.
2. Montrer que l'estimation non biaisée revient à pondérer le signal par une fenêtre triangulaire.
3. Que vaut littéralement la fonction d'autocorrélation du signal $s(n) = 3 \cos(2\pi \frac{1}{10}n)$ avec $n = 0, \dots, 100$.
4. Calculer et représenter la fonction d'autocorrélation de $s(n)$ obtenue par vos programmes.
5. Faire de même pour un bruit blanc gaussien généré par la fonction '*randn*'.
6. Comparer vos résultats à ceux obtenus en utilisant la fonction de Matlab '*xcorr*' avec les deux options '*biased*' et '*unbiased*'.

2 Estimation de densité spectrale

Il existe différentes méthodes d'estimation de la densité spectrale de puissance. Comme cela a été vu en cours, le problème des estimateurs de densité spectrale réside dans la variance qui est généralement grande et qui ne diminue pas en augmentant le nombre d'échantillons du signal. Nous allons examiner les méthodes les plus couramment utilisées.

2.1 Périodogramme

Cette méthode estime la densité spectrale de puissance comme étant le carré du module de la transformée de Fourier du signal. On obtient donc :

$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2 \quad (4)$$

Cette méthode est en fait équivalente à prendre la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation.

2.1.1 Application

On considère le signal $x(t)$ dont on désire calculer la densité spectrale de puissance par la méthode du périodogramme.

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t) \quad (5)$$

avec $A_1 = A_2 = 1$, $f_1 = 15Hz$ et $f_2 = 55Hz$.

1. Prélever 128 échantillons du signal dans l'intervalle $[0s, 1s]$. Ceci revient à prendre un fréquence d'échantillonnage $F_e = 127$.
2. Programmer la méthode et tracer la DSP (en dB) de $x(t)$. Ne pas oublier la normalisation (diviser par le nombre de points).
3. Comparer les résultats à ceux qu'on obtiendrait en prenant simplement la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Cette méthode est appelée méthode de Blackman Tuckey.
4. Ajouter au signal un bruit généré par la fonction *randn* et examiner les différences entre les deux méthodes quand le nombre de points d'échantillonnage varie. On prendra $A_1 = 2, A_2 = 1$, puis $A_1 = 5, A_2 = 1$

2.2 Périodogramme moyenné (Méthode de Welch)

Une manière de réduire la variance de l'estimateur est de subdiviser l'intervalle de définition du signal $x(n)$ en un certain nombre de sous-intervalles. On calcule alors la moyenne des densités spectrales sur chacun des sous-intervalles.

1. Reprendre le signal précédent avec $F_e = 1023$. On prendra alors 4 sous intervalles de 256 points.
2. Calculer et tracer le périodogramme moyenné. Comparer les résultats aux périodogramme classiques.

2.3 Périodogramme moyenné avec recouvrement (overlapping)

Reprendre les questions précédentes en considérant cette fois-ci des sous intervalles de mêmes longueurs que précédemment mais avec des recouvrements d'une demi-longueur.

2.4 Fonction 'PSD' de Matlab

Répondre aux questions précédentes en utilisant la fonction de Matlab *psd*.

TP 3 : Filtrage de Kalman

1 Description du problème

On désire estimer la position x_n et la vitesse v_n d'un mobile se déplaçant à accélération constante γ_0 . Cette accélération est soumise à des accélérations aléatoires γ_n (variation du régime moteur, variation du coefficient d'adhérence,...). L'ensemble de ces accélérations aléatoires sont supposées indépendantes et de moyenne nulle. On peut donc écrire entre deux instants d'échantillonnage de la mesure ($t_n \leq t < t_{n+1}$) :

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \gamma_n \quad (1)$$

$$E[\gamma_n] = 0 \quad (2)$$

$$E[\gamma_n \gamma_{n+k}] = \Gamma \cdot \delta_k \quad (3)$$

On suppose que seule la position est accessible à la mesure et que cette mesure est bruitée. La mesure est notée y_n et le bruit w_n .

1. Écrire l'équation de récurrence donnant v_{n+1} en fonction de v_n, γ_0, γ_n et $T = t_{n+1} - t_n$.
2. Écrire de même l'équation de récurrence donnant x_{n+1} en fonction de x_n et des variables précédentes.
3. Montrer que la représentation d'état du système peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} \underline{X}_{k+1} = A \cdot \underline{X}_k + \underline{U}_k + \underline{G}_k \\ \underline{Y}_k = C \underline{X}_k + \underline{W}_k \end{cases} \quad (4)$$

avec $\underline{X}_k = [x_k \quad v_k]^T$. Donner les matrices A, C ainsi que les vecteurs $\underline{U}_k, \underline{G}_k, \underline{W}_k$ (cf. TD).

4. Programmer les équations des filtres prédicteur et estimateurs. On remarquera que les équations sont plus simples car le système est stationnaire.
5. Générer un ensemble d'observations bruitées en utilisant les paramètres suivants

$$\left[T = 0.1s \quad \gamma_0 = 1ms^{-2} \quad \Gamma = 1 \quad \Omega = 100 \quad \underline{X}_0 = [0 \quad -10]^T \right] \quad (5)$$

On générera la séquence d'accélérations aléatoires en utilisant la fonction *randn*. On supposera par la suite que les variances de bruit d'état et de mesures nous sont inconnues.

2 Influence des conditions initiales

Pour $\Gamma = 1$ et $\Omega = 100$, examiner l'influence du choix des conditions initiales. On considérera les cas suivants :

état initial	Variance initiale Λ_0
$\underline{X}_0 = [0 \quad -10]^T$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\underline{X}_0 = [y_0 \quad \frac{y_1 - y_0}{T}]^T$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\underline{X}_0 = [y_0 \quad \frac{y_1 - y_0}{T}]^T$	$\begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & 4\Omega/T^2 \end{bmatrix}$
$\underline{X}_0 = [y_0 \quad \frac{y_1 - y_0}{T}]^T$	100 $\begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & 4\Omega/T^2 \end{bmatrix}$

3 Influence du choix des variances des bruits

Pour des valeurs de \underline{X}_0 et Λ_0 bien choisis, examiner l'effet du choix arbitraire des variances de bruit de mesure et d'état. On considérera en particulier les valeurs suivantes et on suivra l'évolution de la variance d'erreur d'estimation sur la position.

bruit de mesure Ω	bruit d'état Γ
100	1
10000	1
1	1
100	100
100	0.01
10000	100
1	0.01

TP 4 : Estimation et prédiction

1 Estimation de fonction de transfert

Soit respectivement $x(n)$ et $y(n)$ l'entrée et la sortie d'un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h(n)$ et de fonction de transfert $H(f)$. La fonction d'intercorrélacion est liée à la fonction d'autocorrélacion du signal d'entrée par

$$R_{xy}(n) = h(n) * R_{xx}(n) \quad (1)$$

En prenant la transformée de Fourier de l'expression précédente, on obtient

$$S_{xy}(f) = H(f) \cdot S_{xx}(f) \quad (2)$$

Le problème de l'estimation de la fonction de transfert s'énonce comme suit

Les signaux $x(n)$ et $y(n)$ étant connus, peut on trouver la fonction de transfert $H(f)$ du filtre d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$? La réponse est

$$H(f) = \frac{\widehat{S}_{xy}(f)}{\widehat{S}_{xx}(f)} \quad (3)$$

où $\widehat{S}_{xy}(f)$ et $\widehat{S}_{xx}(f)$ sont des estimées des densités spectrales précédentes.

L'estimation précédente n'est possible que si le signal d'entrée est spectralement riche (spectre relativement large).

Application

On considère le filtre défini par l'équation aux différences

$$y(n) = 0.2 \cdot y(n-1) + 0.25y(n-2) - 0.05 \cdot y(n-3) + x(n)$$

1. Calculer et tracer la fonction de transfert du filtre du filtre (*freqz*).
2. Calculer et tracer la réponse du filtre au signal sinusoïdal $x(n) = \sin(0.01\pi n)$
3. Calculer et tracer l'estimée de la fonction de transfert $H(f)$.
4. L'estimation est-elle raisonnable
5. Reprendre les 3 questions précédentes après avoir ajouter du bruit au signal $x(n)$. Conclure.

2 Équalisation d'un signal de son

On désire restaurer une bande sonore originale. Ce signal est contenu dans le fichier sig2.mat. Le signal sonore peut être considéré comme constitué d'un pseudo bruit blanc. Améliorer la qualité sonore de la bande peut se résumer en trois étapes :

1. – trouver un modèle autoregressif approximant les propriétés du second ordre du signal.

- déterminer la réponse du filtre d'erreur de prédiction (filtre inverse)
 - filtrer le signal par le filtre précédent (le signal générateur d'un signal autoregressif est un bruit blanc).
2. Calculer et tracer le périodogramme et le périodogramme moyenné du signal (fichier *sig2.mat*).
 3. Calculer et tracer la fonction d'autocorrélation biaisée du signal (*xcorr*).
 4. Résoudre le problème de prédiction à un pas et d'ordre 4 du signal en utilisant la fonction *Toeplitz*.
 5. Tracer le spectre du filtre d'erreur de prédiction $|H(f)|^2$.
 6. Equalisez le signal en signal en le passant dans le filtre précédent (*filter*). Tracer le périodogramme du signal de sortie (signal blanchi).

3 Prédiction

Le problème de la prédiction linéaire peut être énoncé comme suit :

Étant donné $N + 1$ échantillons (x_0, x_1, \dots, x_N) d'un signal x , l'objectif est de réaliser un filtre prédictif linéaire d'ordre r ($r < N$) du signal x .

La prédiction linéaire d'un échantillon à partir des r derniers échantillons s'écrira alors

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{r-1} & x_{r-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{r-1} & x_r \\ & & \dots & : & : \\ & & \dots & : & : \\ x_{N-r} & x_{N-r+1} & \dots & x_{N-2} & x_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ : \\ : \\ -a_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r \\ x_{r+1} \\ : \\ : \\ x_N \end{bmatrix}$$

Cette équation est de la forme

$$A \cdot \underline{a} = \underline{x}$$

avec $A : ((N - r + 1) \times r)$, $\underline{a} : (r \times 1)$, $\underline{x} : ((N - r + 1) \times 1)$.

On remarque que la matrice A est non carrée et donc non inversible car généralement le nombre d'observations est très supérieur à r ($N > 2.r - 1$). Il y a donc plus d'équations que d'inconnues. On peut quoi qu'il en soit utiliser la pseudo inverse d'une matrice rectangulaire à rang plein. On obtient alors

$$\underline{a} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot \underline{x}$$

1. Programmer la méthode.
2. Appliquer la méthode pour la prédiction du signal contenu dans *sig1.mat* et du signal de parole. On utilisera une partie du signal pour le calcul des coefficients du filtre et une autre partie pour la validation du prédictif.
3. Examiner l'influence du choix de différentes valeurs de N et r .

Quatrième partie

Quelques fonctions de Matlab

Algèbre linéaire

1 Création de matrices et vecteurs

Matrice nulle $n \times m$	$A = \text{zeros}(n, m)$	
Matrice identité $n \times n$	$A = \text{eye}(n)$	
Matrice de 1 $n \times m$	$A = \text{ones}(n, m)$	
Matrice diagonale	$A = \text{diag}([a_1, a_2, \dots, a_n])$	
Matrice à val aléatoires $n \times m$	$A = \text{rand}(n, m)$	distribution uniforme
Matrice à val aléatoires $n \times m$	$A = \text{randn}(n, m)$	distribution normale
Matrice de Toeplitz	$A = \text{toeplitz}(c)$	c première ligne

2 Manipulation et opérations sur les vecteurs et matrices

Extraction de l'élément i, j	$A(i, j)$
Extraction d'une ligne i	$A(i, :)$
Extraction d'une colonne j	$A(:, j)$
Extraction de bloc	$A([i_1, i_2, \dots], [j_1, j_2, \dots])$
Extraction de la diagonale	$\text{diag}(A)$
Extraction bloc triangulaire supérieur	$\text{triu}(A)$
Extraction bloc triangulaire inférieur	$\text{tril}(A)$
Transposition	A'
Inversion	$\text{inv}(A) \quad 1/A \quad A^{-1}$
Puissance α de matrice	A^α
Puissance α élét. par élét.	$A.^{\alpha}$
Déterminant	$\text{det}(A)$
Rang	$\text{rank}(A)$
Vecteurs, valeurs propres	$[v, d] = \text{eig}(A)$
norme 1,2,inf,fro	
Puissance (α réel) de matrice	

3 Factorisation de matrices

Factorisation QR	$[Q, R] = \text{qr}(X)$
Factorisation LU	$[L, U, P] = \text{lu}(X)$
Factorisation de Cholesky	$R = \text{chol}(X)$

4 Opérations entre matrices et vecteurs

Addition de matrices	$A + B$
Multiplication de matrices	$A * B$
Multiplication élét. par élét	$A. * B$
Résolution du système $Ax = b$	$x = inv(A) * b$ ou $x = A \setminus b$

5 Les polynômes

Un polynôme est représenté par le vecteur ligne ou colonne de ses coefficients du degré le plus élevé au plus faible.

$$p(x) = x^2 + 3x - 1$$

sous Matlab sera déclaré par

$$p = [1, 3, -1]$$

Déclaration par les racines	$p = poly(v)$	v , vecteur des racines
Polynôme caractéristique d'une matrice A	$p = poly(A)$	
Valeur d'un polynôme en a	$p0 = polyval(p, a)$	
Racines d'un polynôme p	$r = roots(p)$	v , vecteur des racines
Produit de deux polynômes	$p = conv(p1, p2)$	

L'addition de deux polynômes pose des problèmes, car ça revient à additionner deux vecteurs de dimensions incompatibles si les polynômes ne sont pas de même degré. Il suffit d'écrire une fonction qu'on va appeler *polyadd*

```

function p = polyadd(p1, p2)
if (size(p1, 2) > 1)
    p1 = p1';
elseif (size(p2, 2) > 1)
    p2 = p2';
end;
if (size(p1, 1) >= size(p2, 1))
    p = p1 + [p2; zeros(size(p1, 1) - size(p2, 1))];
else
    p = p2 + [p1; zeros(size(p2, 1) - size(p1, 1))];
end;

```

Nous donnons dans la suite quelques fonctions de la Toolbox "signal processing".

Traitement du signal

1 Fenétrage

Rectangulaire	$x = \text{boxcar}(N)$
Triangulaire	$x = \text{triang}(2 * n + 1)$
Blackman	$x = \text{boxcar}(N)$
Bartlett	$x = \text{bartlett}(2 * n + 1)$
Chebwin	$x = \text{chebwin}(N, R)$
Hamming	$x = \text{hammin}(N)$
Hanning	$x = \text{hanning}(N)$
Kaiser	$x = \text{kaiser}(N, \text{beta}), 0 \leq \text{beta} \leq 10$

2 Génération de signaux

Dirichlet (sinc périodique)	$y = \text{diric}(x, N)$
dents de scie	$x = \text{sawtooth}(T, \text{largeur})$ ou $x = \text{sawtooth}(T)$
sinc	$y = \text{sinc}(x)$
carré	$x = \text{square}(T, \text{rcycle})$ ou $x = \text{square}(T)$

3 Transformées

TFR	$y = \text{fft}(x, N)$ ou $y = \text{fft}(x)$
T.F inverse	$x = \text{ifft}(y, N)$ ou $x = \text{ifft}(y)$
Transformée en Cosinus	$y = \text{dct}(x)$
T. en Cosinus inverse	$x = \text{idct}(y)$
Symétrie spectrale	$y = \text{fftshift}(x)$
Transformée en z	$G = \text{czt}(x, m, w, a)$

4 Traitement statistique

Est. de la fonction de cohérence	$Cxy = cohere(x, y, NFFT, Fs, WINDOW)$
Coefficients de corrélation	$y = corrcoeff(x)$ ou $z = corrcoeff(x, y)$
Matrice de covariance	$y = cov(x)$
Inter-densité spectrale	$[Pxy, Pxyz, F] = csd(x, y, nfft, Fs, WIN, NOV, P)$
Densité spectrale de puissance	$[Pxx, F] = psd(x, nfft, Fs, WIN, NOV, P)$
Est. de fonction de transfert	$[Txy, F] = csd(x, y, nfft, Fs, WIN, NOV, P)$
inter- et auto-corrélation	$xcorr(x, y)$ ou $xcorr(x)$ ou $xcorr(x, y, '(un)biased)$
covariance (sans les moyennes)	$xcov(x, y)$ ou $xcov(x)$ ou $xcov(x, y, '(un)biased)$
valeur moyenne	$y = mean(x)$
variance	$y = std(x)$

5 Filtrage, analyse et synthèse

Produit de convolution	$C = conv(A, B)$
Simulation d'un filtre	$y = filter(B, A, x)$
Génération de points en fréquence	$F = freqspace(N)$
Réponse fréquentielle en p	$[H, W] = freqs(B, A)$
Réponse fréquentielle en z	$[H, F] = freqz(B, A, N, Fs)$
Réponse impulsionnelle	$[H, T] = impz(B, A, N, Fs)$

6 Modélisation paramétrique

Modélisation à partir d'une réponse fréquentielle en p	$[B, A] = invfreqs(H, W, nb, na)$
Modélisation à partir d'une réponse fréquentielle en z	$[B, A] = invfreqz(H, W, nb, na)$
Algorithme de Levinson	$A = levinson(R, N)$
Prédiction linéaire	$A = lpc(X, N)$
Modélisation ARMA	$[B, A] = stmcb(X, NB, NA)$

7 Fonctions diverses

Convolution à 2 dimensions	$C = conv2(A, B)$
Centrage d'un signal aléatoire	$y = dtrend(x)$
soustraction d'une composante en rampe	$y = detrend(x)$
T. de Fourier 2D	$A = fft2(X, N)$
T. de Fourier Inverse 2D	$A = ifft2(X, N)$
Tracé discret	$stem(x)$
intercorrélations 2D	$xcorr2(A, B)$

Les fonctions qui suivent appartiennent à la toolbox "System Identification"

8 Estimation de paramètres de modèles

Modèle AR (différentes approches)	$TH = ar(y, nbpoints, approach, win)$
Modèle ARMAX	$TH = armax(Z, NN, maxiter, tol, lim, maxsize, T)$
Modèle ARX	$TH = arx(Z, NN, maxsize, T)$
Modèle Box-Jenkins	$TH = bj(Z, NN, maxiter, tol, lim, maxsize, T)$
Variable instrumentale	$TH = iv(Z, NN, NF, MF, maxsize, T)$
Variable instrumentale	$ivar, iv, ivx, iv4$

Index

- Aléatoire, 15
- Autocorrélation, 16
- Biais
 - d'un estimateur, 26
- Birkoff
 - Théorème de, 18
- Bruit blanc, 21
- Causalité, 12, 13
- convolution, 45
- Corrélogramme, 44
- Covariance, 16
- Déterministe, 15
- Dirac, 13
- DSP, 19
- Echantillonnage, 13
- ELM, 29
- ELMQ, 26
- Equation
 - de Yule-Walker, 23
- Equation Normale, 23, 46
- Equirépartie, 19
- Ergodicité, 18
- Espérance, 16
- Estimation, 25
 - Bayésienne, 30
 - Corrélogramme, 44
 - de la DSP, 40
 - de la fonction d'autocorrélation, 39
 - de la moyenne, 37
 - de la variance, 38
 - Méthode du modèle, 44
 - non Bayésienne, 30
 - non-bayésienne, 34
 - nulle, 30
 - Spectrale, 37
- Fenêtre
 - de Blackman, 41
 - de Chebychev, 41
 - de Hamming, 41
 - de Hannng, 41
 - de Kaiser, 41
 - rectangulaire, 41
 - triangulaire, 41
- Filtrage, 12
 - continu, 12
 - de Kalman, 48
 - discret, 12
 - dynamique, 12
- Filtre
 - AR, 13
 - formeur, 21
 - RIF, 13
 - RII, 13
- Fonction coût, 30
- Fonction risque, 30
- Fourier, 11
 - continue, 11
 - discrète, 11
- Gaussiens
 - Signaux, 20
- Innovation, 25
- Kalman, 48
- Laplace, 11
- Matrice
 - définie non négative, 20
 - de corrlation, 19
 - hermitienne, 19
- Moindres carrés
 - linéaires, 27
 - non-linéaires, 29
 - Récurrents, 47
- Moments
 - d'ordre 1, 16
 - d'ordre 2, 16
 - statistiques, 16
 - temporels, 17
- Périodogramme, 40

- moyenné, 41
- Principe d'orthogonalité, 28
- Puissance, 17

- Récurrent, 45

- Signaux
 - aléatoires, 15
 - AR, 22
 - ARMA, 23
 - déterministes, 15
 - Gaussiens, 20
 - MA, 22
- Stabilité, 12, 13
- Stationnarité, 18

- Transformée
 - de Fourier, 11
 - de Laplace, 11
 - en z , 11

- Variance, 17
 - d'un estimateur, 26