7.1 TD 1 : Proprietes des signaux aléatoires

Exercice 1

On considère le signal aléatoire $x(t) = a\cos(\omega_0 t + \phi)$, où a et ω_o sont constantes et ϕ est une variable aléatoire équirépartie sur $[0, 2\pi]$.

1. Calculer $E[x(t)]$ et $< x(t) >$.
2. Calculer $E[x(t)x(t-\tau)]$ et$< x(t)x(t-\tau) >$. Conclusion.
3. Quelle est la densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$ de $x(t)$? La représenter graphiquement.
4. Quelle est la puissance du signal ?

Exercice 2

Soit $x(t)$un signal aléatoire, stationnaire d'ordre 2, réel. En partant de l'expression

$$E\left[(x(t) \pm x(t-\tau))^2\right]$$

Montrer que la fonction d'autocorrélation vérifie la relation :

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$$

Exercice 3

Soit le signal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k g(t - kT - \theta)$$

où $\{a_k\}$ est une suite de variables aléatoires telle que

$$E(a_k) = m_a \qquad R_{aa}(k) = E\left[a_n a_{n+k}\right]$$

$g(t)$ est un signal déterministe, de durée au plus égale à T, d'énergie finie et de transformée de fourier $G(f)$. θ est une variable équirépartie sur $[0, T]$ et indépendante des a_k.

Étudier la stationnarité au sens large de $x(t)$.

7.2 TD 2 : Signaux aléatoires vectoriels

Exercice 1 : Matrices définies positives

Soit M une matrice non symétrique. Est-ce que la propriété $M > 0$ entraîne que les valeurs propres sont positives ?

Est-ce que la positivité des valeurs propres entraîne que $M > 0$?

Exercice2 : Propriétés des matrices de covariance

Soit x une variable aléatoire vectorielle supposée centrée. On définit sa matrice de corrélation (ou matrice de variance covariance) par

$$\Gamma = E\left[xx^H\right] \qquad \Gamma_{ij} = E\left[x_i x_j^*\right]$$

1. Montrer que la matrice Γ est hermitienne.

2. Montrer que Γ est définie non négative.

3. Montrer que les valeurs propres de Γ sont non négatives et les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

4. Montrer que toute matrice hermitienne définie non négative est une matrice de covariance

5. Soit y un vecteur aléatoire obtenu de x par transformation $y = Ax$. Calculer la matrice de covariance de y.

6. Appliquer le résultat précédent dans le cas d'un vecteur x blanc unitaire.

7.3 TD 3 : Estimateurs 1

Exercice 1

De nombreux phénomènes physiques peuvent être décrits par une variable aléatoire réelle et vectorielle x s'écrivant sous la forme

$$x = N + ms$$

où N est un bruit blanc centré de matrice de covariance Γ, s est un vecteur non aléatoire et m un paramètre, parfois appelé amplitude du signal. On suppose de plus que Γ peut s'écrire sous la forme νR, où ν est une quantité scalaire positive du type d'une variance, R une matrice définie positive.

1. Calculer la moyenne $\mathrm{E}[x]$.
2. Calculer la matrice de covariance C de x définie par $C = E\left[(x - E(x))(x - E(x))^T\right]$.
3. On réalise un filtrage linéaire de x défini par un vecteur h et dont la sortie scalaire s'écrit :

$$y = h^T x$$

   Calculer la moyenne $m_y = E[y]$ et la variance $v_y = E[(y - E(y))^2]$ de la variable aléatoire scalaire y.
4. On souhaite que y soit une estimation de m, c'est à dire $y = \hat{m}$. Déterminer la condition sur h assurant que l'estimateur est sans biais.
5. Trouver le vecteur h_o conduisant à un estimateur sans biais et à variance minimale. Le résultat dépend-il du paramètre ν.
6. Donner la forme de cet estimateur, dans le cas le plus courant ou $R = I$ et où s est le vecteur dont toutes les composantes satisfont $s_i = 1$. Interpréter le résultat.

Exercice 2

Soit Φ une phase aléatoire équirépartie sur $[0, \pi]$. Considérons les variables aléatoires x et y définies par $x = \cos\Phi$ et $y = \sin\Phi$.

1. Calculer les moyennes $E[x]$ et $E[y]$.

2. Calculer les variances de x et y définies respectivement par $\Gamma_x = E\left[(x - E(x))^2\right]$ et $\Gamma_y = E\left[(y - E(y))^2\right]$.

3. Calculer finalement la covariance de x et y donnée par $E\left[xy\right]$.

4. Donner la meilleure estimation linéaire en moyenne quadratique de y à partir de x. On rappelle la formule identique à celle du cours mais dans le cas où x et y ne sont pas centrés

$$\hat{y} = E\left[y\right] + \Gamma_{yx}\Gamma_x^{-1}\left(x - E\left[x\right]\right)$$

Conclure.

5. Donner l'estimée en moyenne quadratique de y. On rappelle :

$$\hat{y} = E(y/x)$$

7.4 TD 4 : Estimateurs 2

Exercice 1

Soit t_1 et t_2 deux estimateurs différents du même paramètre θ. On suppose que $E[t_1] = \theta + b_1$ et $E[t_2] = \theta + b_2$ où b_1 et b_2 sont des valeurs numériques connues.

1. Peut-on trouver un estimateur t combinaison linéaire de t_1 et t_2 qui soit sans biais ? On posera

$$t = \alpha t_1 + \beta t_2$$

2. On suppose $b_1 = b_2 = 0$ et $cov(t_1, t_2) = 0$. Calculer α et β pour que t soit un estimateur sans biais de variance minimale. Quelle est alors cette variance ?

3. Dans le cas où t_1 et t_2 sont les moyennes empiriques de deux échantillons tirés au hasard d'une même population au cours d'épreuves indépendantes, à quoi correspond l'estimateur t à variance minimale.

Exercice 2

On désire estimer les bornes a et b du domaine de véracité d'une variable aléatoire x uniforme, pour cela on effectue la mesure de N échantillons indépendants $x = [x_1, ..., x_N]$.

1. Déterminer les estimateurs du maximum de vraisemblance de a et b.

2. Calculer le biais et l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de a. On rappelle que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{6} N(N+1)(N+2)$$

Exercice 3 : Élimination du bruit

Un objectif courant dans les problèmes de traitement du signal consiste à éliminer le bruit. Dans ce problème, nous discutons une situation particulière en utilisant un signal de référence bruit seul. Supposons que l'observation soit composée de deux vecteurs x_1 et x_2 appartenant respectivement à R^p et R^{N-p}, où N et p sont des entiers arbitraires satisfaisant $p < N$. Ces vecteurs peuvent être écrits sous la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= s + b_1 \\ x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

où s est le signal à estimer tandis que b_1 et b_2 sont des termes de bruit. On dit parfois que x_2 est une "référence bruit seul".

1. Montrer que l'ELMQ de s en fonction de x_1 et x_2 peut s'écrire sous la forme

$$\hat{s} = M_1 x_1 + M_2 x_2$$

et déterminer les nombres de lignes et de colonnes de M_1 et M_2.

2. Supposons que s soit non corrélé à b_1 et b_2. En introduisant les matrices

$$\Gamma_s = E\left[ss^T\right] \quad \Gamma_1 = E\left[b_1 b_1^T\right] \quad \Gamma_2 = E\left[b_2 b_2^T\right] \quad \Gamma_{12} = E\left[b_1 b_2^T\right]$$

écrire les équations permettant le calcul des matrices M_1 et M_2.

3. Résoudre ces équations et exprimer à l'aide des Γ et des vecteurs observations x_1 et x_2.

4. L'action de la matrice M_2 peut être interprétée comme une élimination de bruit. Pour ceci introduisons

$$\hat{b}_1 = A b_2$$

où $\hat{b}_1$ est l'ELMQ de b_1 à l'aide de b_2. Exprimer en fonction de x_1 et en utilisant uniquement les matrices Γ_s et W, où W est la matrice erreur dans l'estimation donnant $\hat{b}_1$.

5. Donner la structure du système complet pour L'ELMQ de $\hat{s}$ à l'aide de l'observation x_1 et x_2. Expliquer pourquoi ce système est parfois appelé système à soustraction de bruit.

6. Étudier les deux cas ou l'ELMQ apparaissant en 4. est soit singulière soit nulle.

7.5 TD 5 : Estimation et signaux AR

Exercice 1

On considère un mobile se déplaçant à vitesse constante v. Sa position y_n, relevée aux instants nT pour $n \in \{1, ..., N\}$, est entachée d'un bruit b_n additif, blanc, centré et de variance σ^2.

On définit l'estimateur empirique $\widehat{v}(y)$ qui correspond à la moyenne des vitesses instantanées :

$$\widehat{v}(y) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{y_n}{nT}$$

1. Cet estimateur est-il biaisé ?
2. Calculer sa variance $E\left[(\widehat{v}(y) - v)^2\right]$.

Exercice 2

Soit x_n un signal aléatoire réel, centré et autorégressif d'ordre 3, donné donc par

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + a_3 x_{n-3} + u_n$$

où u_k est un bruit blanc centré de variance σ_u^2. On notera $\gamma_i = E\left[x_n x_{n-i}\right]$

Le but de l'exercice est de calculer les coefficients a_1, a_2 et a_3.

1. Montrer que le vecteur $a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T$ et σ_u^2 sont solution des équations suivantes

$$\begin{aligned} R.a &= c \\ \sigma_u^2 &= \gamma_0 - a^T c \end{aligned}$$

   où

$$R = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \end{bmatrix} \text{ et } c = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}$$

2. On suppose que $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$ et $|\gamma_2| < \gamma_0$. Déterminer le vecteur a et la variance du bruit générateur σ_u^2.
3. En déduire toutes les valeurs de la fonction d'autocorrélation de x.
4. Montrer que $|\gamma_2| \leq \gamma_0$.
5. On suppose maintenant que $\gamma_0 = \gamma_2 = 1$ et que l'on a toujours $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$. Donner la structure du signal x_n et trouver un exemple de trajectoire de ce signal.

7.6 TD 6 : Filtrage de Kalman

On désire estimer la position d'un véhicule se déplaçant à vitesse constante. Cette vitesse est perturbée par des vitesses aléatoires. On suppose qu'entre deux instants d'observation, la vitesse est constante. On peut donc écrire

$$v(t) = v_o + \gamma_n$$

pour $t_n < t < t_{n+1}$

L'équation d'état du système donnant la variation de la position s'écrit donc :

$$x_{n+1} = x_n + T.v_o + T.\gamma_n$$

L'équation de mesure s'écrit :

$$y_n = x_n + w_n$$

avec :

$$\begin{aligned} E[\gamma_n.\gamma_n^T] &= \Gamma \\ E[w_n.w_n^T] &= W \end{aligned}$$

On donne :

$$T = 0.1s, W = 100, \Gamma = 1, x_o = 0, \Sigma_0 = 0$$

Donner les équations du filtre de Kalman prédicteur.